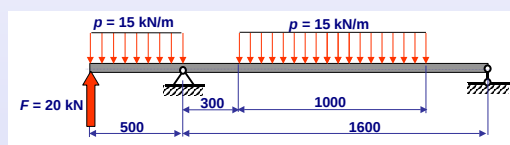


TUGEVUSÕPETUS

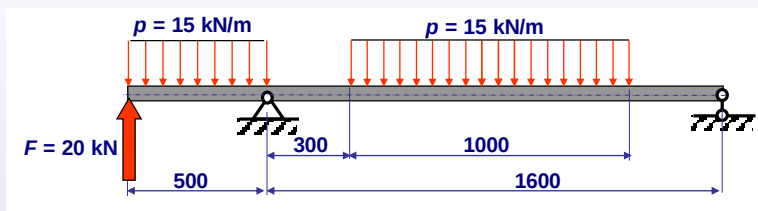
PAINE: Keerukas koormus



1. Algandmed ja ülesande püstitus

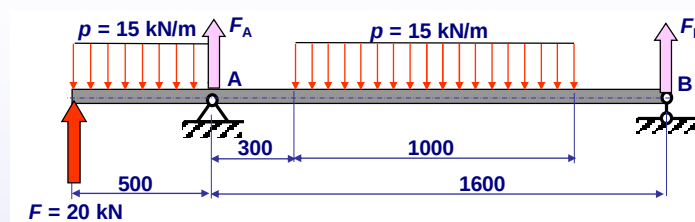
1.1. Ühtlane konsooliga tala

Valida tala jaoks sobiv
INP-profiil



Materjal: teras S355
Nõutav varutegur: $[S] = 2,5$

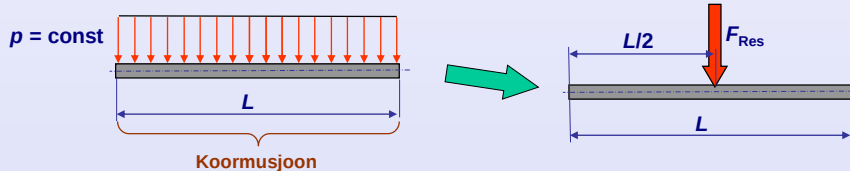
1.2. Toereaktsioonid (1)



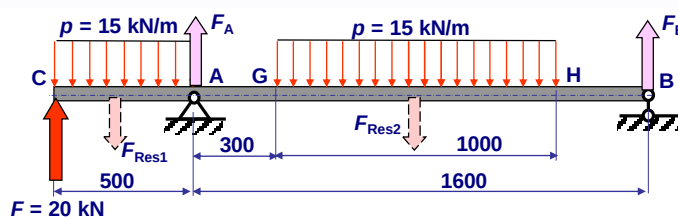
Ühtlase joonkoormuse resultant

Ühtlase joonkoormuse resultant
mõjub koormusjoone keskel

$$F_{\text{Res}} = pL$$



1.2. Toereaktsioonid (2)



1. tasakaaluvõrrand

$$\sum \mathcal{M}^{(A)} = 0$$

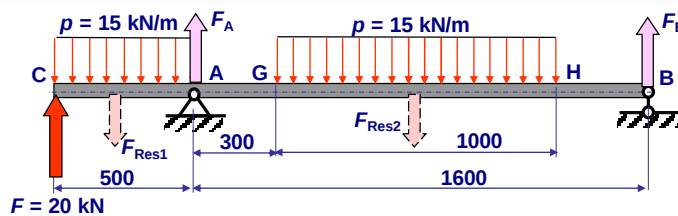
Kõikide momentide summa punkti A suhtes

$$F \cdot CA - p \frac{CA^2}{2} + p \cdot GH \cdot \left(AG + \frac{GH}{2} \right) - F_B \cdot AB = 0$$

$$F_B = \frac{F \cdot CA - p \frac{CA^2}{2} + p \cdot GH \cdot \left(AG + \frac{GH}{2} \right)}{AB} = \frac{20 \cdot 0,5 - 15 \cdot \frac{0,5^2}{2} + 15 \cdot 1 \cdot \left(0,3 + \frac{1}{2} \right)}{1,6} = 12,57 \approx \underline{12,6 \text{ kN}}$$

Pöördemomentide summa on otstarbekas arvutada sellise punkti suhtes, mida läbib mõne tundmatu väärtusega jõu mõjusirge (punktid A ja B)

1.2. Toereaktsioonid (3)



2. tasakaaluvõrrand

$$\sum \mathcal{M}^{(B)} = 0$$

Kõikide momentide summa punkti B suhtes

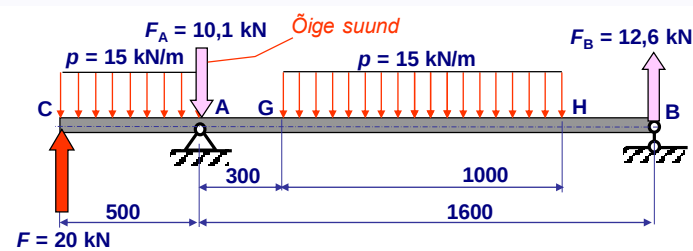
$$F \cdot CB - p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AB \right) + F_A \cdot AB - p \cdot GH \cdot \left(\frac{GH}{2} + HB \right) = 0$$

$$F_A = \frac{-F \cdot CB + p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AB \right) + p \cdot GH \cdot \left(\frac{GH}{2} + GB \right)}{AB} = \frac{-20 \cdot 2,1 + 15 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,5}{2} + 1,6 \right) + 15 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0,3 \right)}{1,6} = -10,07 \approx \underline{-10,1 \text{ kN}}$$

PROBLEEM:
Toereaktsiooni väärtus tuli märgiga "-"

Vektori suund tuleb muuta

1.2. Toereaktsioonid (4)



3. tasakaaluvõrrand

$$\sum F = 0$$

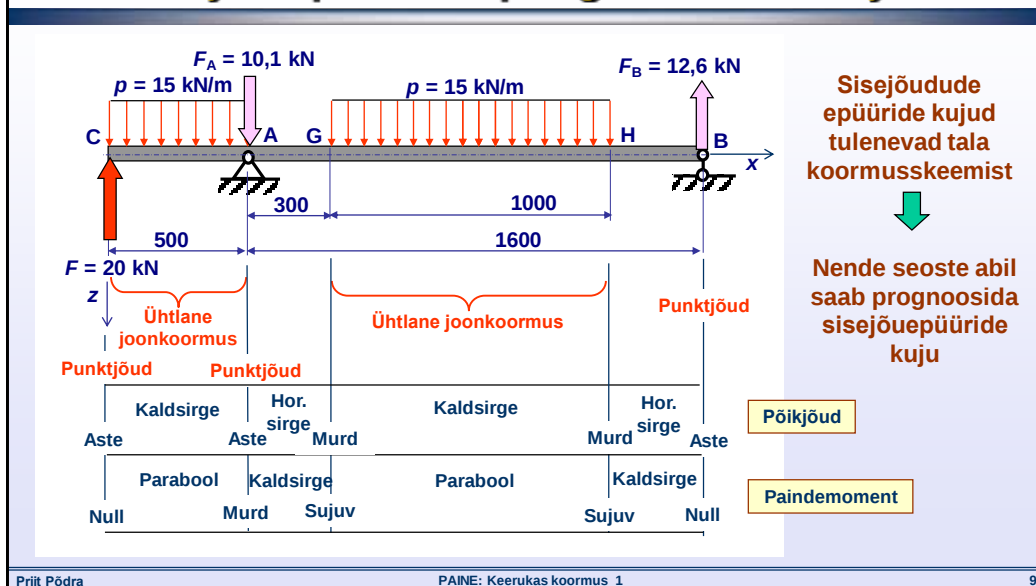
Kõikide
jõudude
summa
vertikaalsihis

$$F - p \cdot CA - F_A - p \cdot GH + F_B = 0 \Rightarrow 20 - 15 \cdot 0,5 - 10,1 - 15 \cdot 1 + 12,6 = 0 \Rightarrow \underline{0 = 0}$$

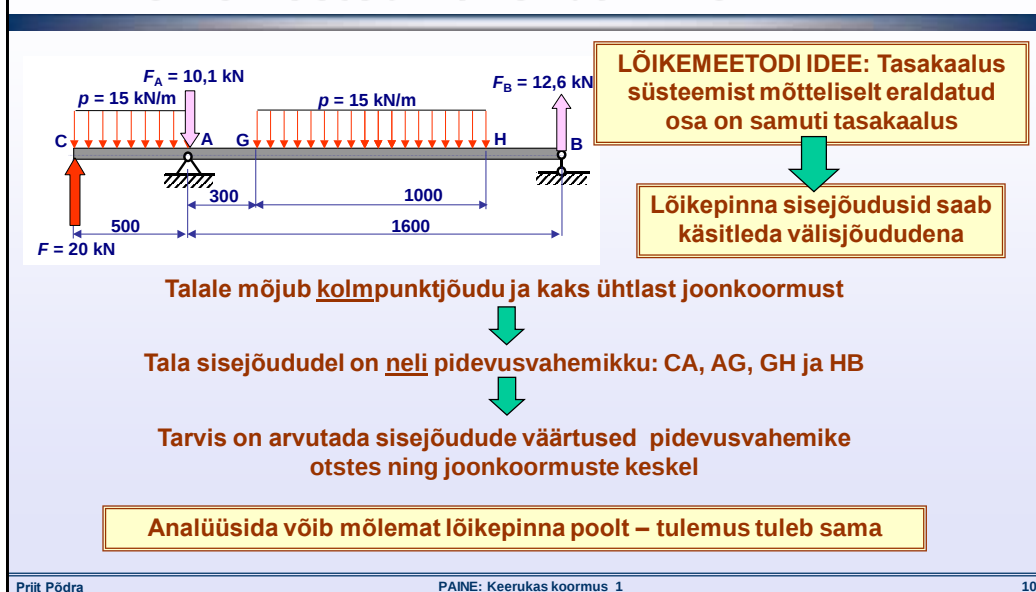
Toereaktsioonide väärtused ja suunad on õiged

2. Sisejõudude analüüs

2.1. Sisejõuepüüride prognoositav kuju



2.2. Lõikemeetodi rakendamine



2.3. Sisejõud lõikes C

Arvutuskeem

Ristlõikes C on põikjõu Q epüüril aste

Põikjõu Q väärtus ei ole üheselt määratud

Ristlõike C uurimiseks saab kasutada abiristlõiget C'

Lõige C'

Ristlõige $C' =$ ristlõikele C lähedal paiknev ristlõige $CC' \rightarrow 0$

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(C)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - p \cdot CC' - Q_C = 0 \Rightarrow Q_C = F - p \cdot CC' \\ F \cdot CC' - p \cdot \frac{CC'^2}{2} - M_C = 0 \Rightarrow M_C = F \cdot CC' - p \cdot \frac{CC'^2}{2} \end{cases}$$

Kui $CC' = 0$, siis: $Q_C = Q_C = F = 20 \text{ kN}(+)$

Kui $CC' = 0$, siis: $M_C = M_C = 0$

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 11

2.4. Sisejõud lõikes A' (1)

Arvutuskeem

Ristlõikes A on põikjõu Q epüüril aste

Põikjõu Q väärtus ei ole üheselt määratud

Ristlõike A uurimiseks saab kasutada abiristlõikeid A' ja A''

Lõige A'

Ristlõige $A' =$ ristlõikele A lähedal paiknev ristlõige $AA' \rightarrow 0 \Rightarrow CA' \rightarrow CA = 0,5 \text{ m}$

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(A')} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - p \cdot CA' - Q_{A'} = 0 \\ Q_{A'} = F - p \cdot CA' = 20 - 15 \cdot 0,5 = 12,5 \text{ kN}(+) \end{cases}$$

Märk "+": suund joonisel on õige
Positiivsel sisepinnal positiivses suunas

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 12

2.4. Sisejõud lõikes A' (2)

Arvutuskeem

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(A')} = 0 \end{cases}$$

$$F \cdot CA' - p \cdot \frac{CA'^2}{2} - M_{A'} = 0$$

$$M_{A'} = M_A = F \cdot CA' - p \cdot \frac{CA'^2}{2} = 20 \cdot 0,5 - 15 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 8,125 \approx 8,2 \text{ kNm (+)}$$

Lõige A'

Ristlõige A' = ristlõikele A lähedal paiknev ristlõige
 $AA' \rightarrow 0 \Rightarrow CA' \rightarrow CA = 0,5 \text{ m}$

Märk "+": suund joonisel on õige
 Positiivsed kiud tõmmatud

Prüit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 13

2.5. Sisejõud lõikes J

Arvutuskeem

Tasakaaluvõrrand

$$\sum \mathcal{M}^{(J)} = 0 \Rightarrow F \cdot CJ - p \cdot \frac{CJ^2}{2} - M_J = 0$$

$$M_J = F \cdot CJ - p \cdot \frac{CJ^2}{2} = 20 \cdot 0,25 - 15 \cdot \frac{0,25^2}{2} = 4,53 \approx 4,6 \text{ kNm (+)}$$

Lõige J

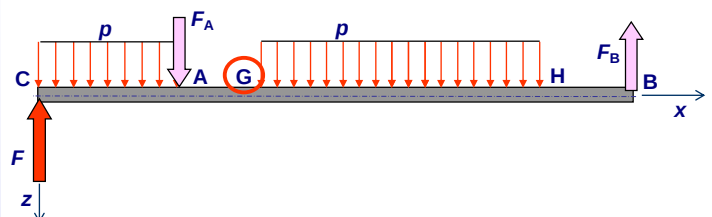
Lõigul CA on paindemomendi M epüür parabool
 Parabooli joonestamiseks on tarvis väärtusi pidevusvahemiku sees
 Põikjõu Q väärtuse arvutamine ei ole vajalik

Märk "+": suund joonisel on õige
 Positiivsed kiud tõmmatud

Prüit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 14

2.6. Sisejõud lõikes G (1)

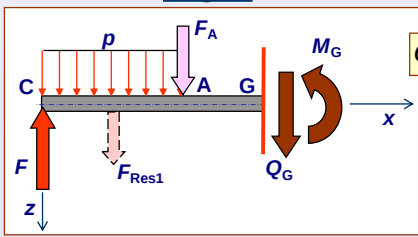
Arvutuskeem



Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(G)} = 0 \end{cases}$$

Lõige G



$$F - p \cdot CA - F_A - Q_G = 0$$

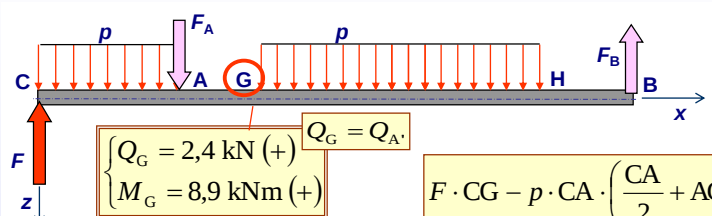
$$Q_G = F - p \cdot CA - F_A = 20 - 15 \cdot 0,5 - 10,1 = 2,4 \text{ kN (+)}$$

Märk "+": suund joonisel on õige
Positiivsel sisepinnal positiivses suunas

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 15

2.6. Sisejõud lõikes G (2)

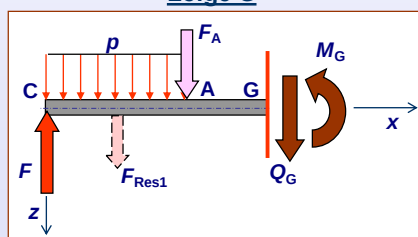
Arvutuskeem



Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(G)} = 0 \end{cases}$$

Lõige G



$Q_G = 2,4 \text{ kN (+)}$
 $M_G = 8,9 \text{ kNm (+)}$
 $Q_G = Q_A$

$$F \cdot CG - p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AG \right) - F_A \cdot AG - M_G = 0$$

$$M_G = F \cdot CG - p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AG \right) - F_A \cdot AG$$

$$= 20 \cdot 0,8 - 15 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,5}{2} + 0,3 \right) - 10,1 \cdot 0,3 = 8,845 \approx 8,9 \text{ kNm (+)}$$

Positiivsed kiud tõmmatud
Märk "+": suund joonisel on õige

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 16

2.7. Sisejõud lõikes H

Arvutuskeem

$\begin{cases} Q_H = 12,6 \text{ kN } (-) \\ M_H = 3,8 \text{ kNm } (+) \end{cases}$

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(H)} = 0 \end{cases}$$

Lõige H

$Q_H - F_B = 0 \Rightarrow Q_H = F_B = 12,6 \text{ kN } (-)$

Märk "+": suund joonisel on õige

Negatiivsel sisepinnal positiivses suunas

$M_H - F_B \cdot HB = 0 \Rightarrow M_H = F_B \cdot HB = 12,6 \cdot 0,3 = 3,78 \approx 3,8 \text{ kNm } (+)$

Märk "+": suund joonisel on õige

Positiivsed kiud tõmmatud

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 17

2.8. Sisejõud lõikes K (1)

Arvutuskeem

$\begin{cases} Q_K = 0 \\ M_K = \max \end{cases}$

Lõige K

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(K)} = 0 \end{cases}$$

$p \cdot KH - F_B = 0 \Rightarrow KH = \frac{F_B}{p} = \frac{12,6}{15} = 0,84 \text{ m}$

Lõigul GH on muutunud põikjõu Q väärtuste märk $Q_G (+) \rightarrow Q_H (-)$

Lõigul GH on põikjõu Q nullkoht

Lõikes K kus $Q = 0$ on $M = \max$

Selle lõike K asukoht ei ole teada

Lõike K asukoht tuleb arvutada

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 18

2.8. Sisejõud lõikes K (2)

Arvutuskeem

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(K)} = 0 \end{cases}$$

$$M_K + p \cdot \frac{KH^2}{2} - F_B \cdot KB = 0$$

$$M_K = -p \cdot \frac{KH^2}{2} + F_B \cdot KB =$$

$$= -15 \cdot \frac{0,84^2}{2} + 12,6 \cdot (0,84 + 0,3) =$$

$$= 9,07 \approx 9,1 \text{ kNm (+)}$$

Lõige K

$$\begin{cases} Q_K = 0 \\ M_K = 9,1 \text{ kNm (+)} \end{cases}$$

Märk "+": suund joonisel on õige

Positiivsed kiud tõmmatud

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 19

2.9. Sisejõud lõikes B

Arvutuskeem

Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(B)} = 0 \end{cases}$$

$$Q_B - F_B = 0 \Rightarrow Q_B = F_B = 12,6 \text{ kN (-)}$$

$$M_B - F_B \cdot B'B = 0 \Rightarrow M_B = F_B \cdot B'B$$

Kui B'B = 0, siis: $M_B = M_{B'} = 0$

Lõige B'

$$\begin{cases} Q_B = 12,6 \text{ kN (-)} \\ M_B = 0 \end{cases}$$

Ristlõike B' = ristlõikele B lähedal paiknev ristlõige BB' → 0

Ristlõikes B on põikjõu Q epüüril aste

Põikjõu Q väärtus ei ole üheselt määratud

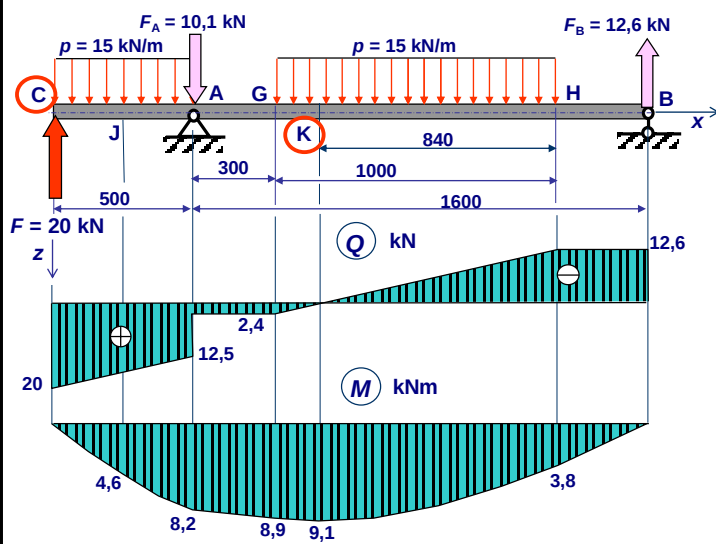
Ristlõike B uurimiseks saab kasutada abiristlõiget B'

Märk "+": suund joonisel on õige

Negatiivsel sisepinnal positiivses suunas

Priit Põdra PAINE: Keerukas koormus_1 20

2.10. Sisejõudude epüürid



Sisejõudude analüüsi tulemus

Ohtlikud ristlõiked

Ristlõige C:

$$Q_C = 20 \text{ kN}$$

$$M_C = 0$$

Ristlõige K:

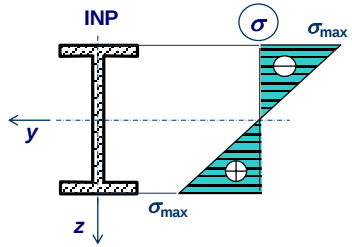
$$Q_K = 0$$

$$M_K = 9,1 \text{ kNm}$$

3. Tugevusarvutus

3.1. INP-ristlõike nõutav tugevusmoment

Ristlõike paindepinge epüür



Painde tugevustingimus

$$\sigma_{\max}^{(My)} = \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

või

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]$$

Suurim normaalpinge ristlõikes

Ristlõike telg-tugevusmoment

Ülesandes nõutav varuteguri väärtus

Materjali voolepiir

Ristlõike
painde-
moment

$$\sigma_y = 355 \text{ MPa}$$

Ristlõikele nõutav telg-tugevusmoment

$$[W] = \frac{M}{\sigma_y} [S] = \frac{9,1 \cdot 10^3}{355 \cdot 10^6} \cdot 2,5 = 64,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 64 \text{ cm}^3$$

Painde tugevustingimus tugevusmomentide kaudu

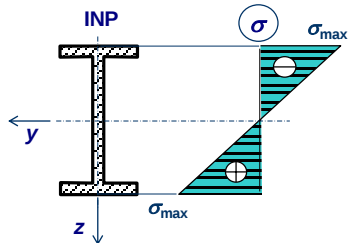
$$W_y \geq [W] = 64 \text{ cm}^3$$

Kui paine on ümber telje y

Ühtlane tala on piisavalt tugev, kui selle ristlõike tugevusmomenti väärtus on vähemalt 64 cm³

3.2. INP-ristlõike valik

Ristlõike paindepinge epüür



INP-PALKIT INP beam

Terasklasiif: SFS-EN 10 025
Tolerantsid: SFS-EN 10 204/2.1-B
DIN 77100
DIN 1025/1
DIN 50 049/2.1-B



Valida tabelist profiil, mille:

$$W_x \geq [W] = 64 \text{ cm}^3$$

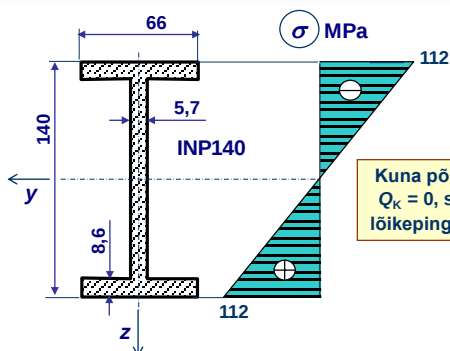
Sobiv profiil on INP140:

$$W_x = 81,9 \text{ cm}^3 \geq [W] = 64 \text{ cm}^3$$

Tabeli W_x vastab selles ülesandes W_y-le

Mõõt ja paksus										Standardiseeritud arv				
Pro	h	b	t	t _w	r ₁	Volgus	Põhiko- pala	Painde- koef	I _x	W _x	I _y	W _y	I _z	W _z
80	80	42	3,9	5,9	2,3	8,304	7,27	5,94	77,8	19,5	3,20	6,28	5,08	9,01
100	100	50	4,5	6,8	2,7	8,270	10,60	8,34	171	24,2	4,01	12,2	8,88	1,07
120	120	58	5,1	7,7	3,1	8,450	14,20	11,08	328	34,4	4,81	17,5	11,45	1,38
140	140	68	5,7	8,6	3,4	8,502	18,20	14,85	578	81,9	5,61	25,8	16,7	1,40
160	160	74	6,3	9,3	3,8	8,575	22,80	17,91	955	117	6,40	34,7	19,8	1,55
180	180	82	6,9	10,4	4,1	8,640	27,60	21,95	1458	161	7,20	41,3	19,9	1,71

3.3. Tala tugevuskontroll ristlõikes K



Kuna põikjõud $Q_K = 0$, siis ka lõikepinge $\tau = 0$

Suurim paindepinge

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{9,1 \cdot 10^3}{81,9 \cdot 10^{-6}} = 111,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx \underline{112 \text{ MPa}}$$

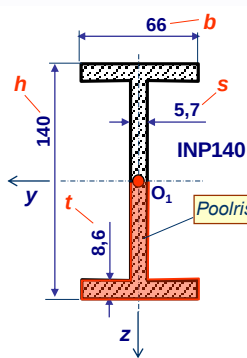
Tugevuse kontroll paindel

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} = \frac{355}{112} = 3,16 \approx 3,1 \geq [S] = 2,5$$

Ristlõike K tugevus paindel on tagatud

Standardsete profiilide puudus --- valiku võimalus vaid etteantud ridadest

3.4. Tala tugevuskontroll ristlõikes C (1)



Suurim lõikepinge punktides O₁:

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{O1}}{I_s} \quad \text{Ristlõike põikjõud} \quad \text{Poolristlõike staatiline moment telje y suhtes} \quad \text{Seinapaksus}$$

Ristlõike inertsimoment

Poolristlõike staatiline moment telje y suhtes

$$S_{O1} = \left(\frac{h}{2} - t \right) s \left(\frac{h}{4} - \frac{t}{2} \right) + tb \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \left(\frac{14}{2} - 0,86 \right) \cdot 0,57 \cdot \left(\frac{14}{4} - \frac{0,86}{2} \right) + 0,86 \cdot 6,6 \cdot \left(\frac{14}{2} - \frac{0,86}{2} \right) = 48,0 \approx \underline{48 \text{ cm}^3}$$

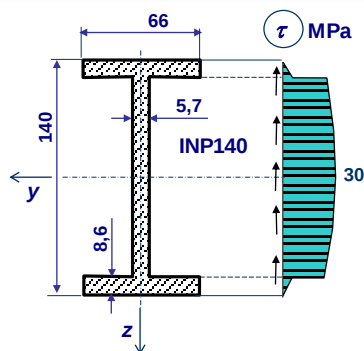
Tabelist

$$I = I_x = 573 \text{ cm}^4$$

Tabeli I_x vastab selles ülesandes I_y -le

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{O1}}{I_s} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 48 \cdot 10^{-6}}{573 \cdot 10^{-8} \cdot 5,7 \cdot 10^{-3}} = 29,3 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx \underline{30 \text{ MPa}}$$

3.4. Tala tugevuskontroll ristlõikes C (2)



Kuna
paindemoment
 $M_C = 0$, siis ka
paindepinge $\sigma = 0$

Terase voolepiir nihkel

$$\tau_y = (0,56 \dots 0,6) \sigma_y = 0,56 \sigma_y$$

Voolepiir tõmbel

Empiiriline sõltuvus terastele

$$\sigma_y = 355 \text{ MPa}$$

$$\tau_y = 0,56 \sigma_y = 0,56 \cdot 355 = 198,8 \approx \underline{198 \text{ MPa}}$$

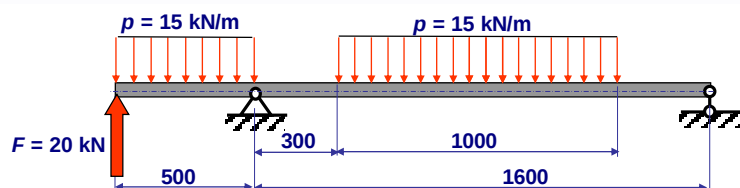
Tugevuse kontroll lõikel

$$S_\tau = \frac{\tau_y}{\tau_{\max}} = \frac{198}{30} = \underline{6,6 \geq [S] = 2,5}$$

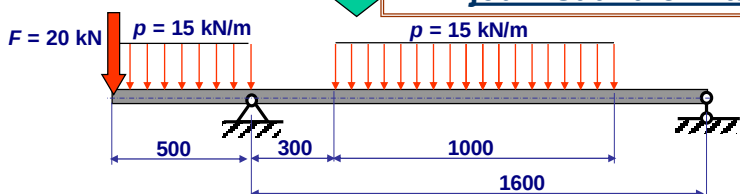
Ristlõike C tugevus lõikel on tagatud

4. Jätakuülesanne

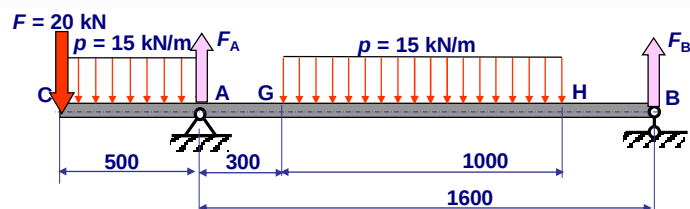
4.1. Jätkuülesande püstitus



Koostada sisejõudude epüürid, kui jõu F suund on vastupidine



4.2. Toereaktsioonid



Tasakaaluvõrrandid

$$\begin{cases} \sum \mathcal{M}^{(A)} = 0 \\ \sum \mathcal{M}^{(B)} = 0 \end{cases}$$

$$F \cdot CA + p \cdot \frac{CA^2}{2} - p \cdot GH \cdot \left(AG + \frac{GH}{2} \right) + F_B \cdot AB = 0$$

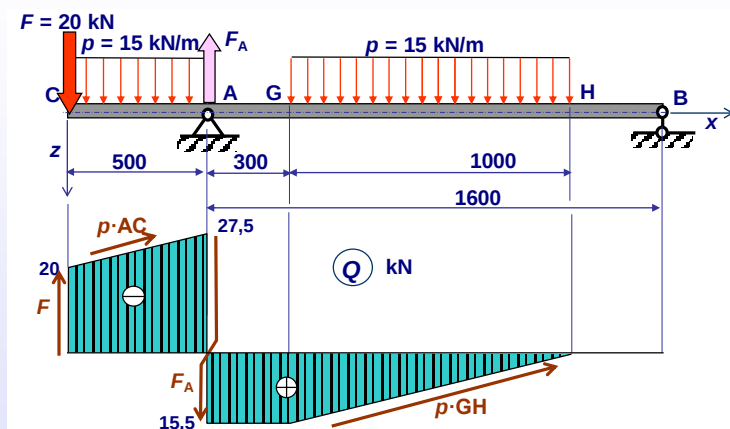
$$F \cdot CB + p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AB \right) - F_A \cdot AB + p \cdot GH \cdot \left(\frac{GH}{2} + HB \right) = 0$$

$$F_B = \frac{-F \cdot CA - p \cdot \frac{CA^2}{2} + p \cdot GH \cdot \left(AG + \frac{GH}{2} \right)}{AB} = \frac{-20 \cdot 0,5 - 15 \cdot \frac{0,5^2}{2} + 15 \cdot 1 \cdot \left(0,3 + \frac{1}{2} \right)}{1,6} = 0,078 \approx 0$$

NB! See on juhus

$$F_A = \frac{F \cdot CB + p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AB \right) + p \cdot GH \cdot \left(\frac{GH}{2} + GB \right)}{AB} = \frac{20 \cdot 2,1 + 15 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,5}{2} + 1,6 \right) + 15 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0,3 \right)}{1,6} = 42,4 \approx 43 \text{ kN}$$

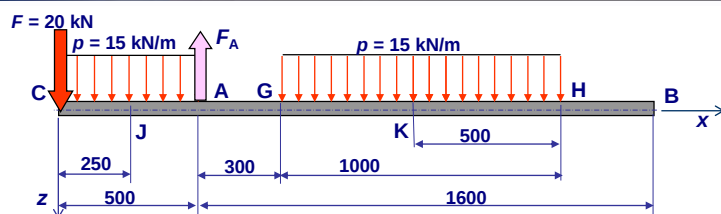
4.3. Põikjõu Q epüür



1. Punktjõud avaldub Q epüüril astmena selle väärtuse võrra ja selle suunale vastavas suunas

1. Ühtlane joonkoormus avaldub Q epüüril kaldsirgena, tõustes selle resultantväärtuse võrra ja selle suunale vastavas suunas

4.4. Paindemomendi M epüür (1)



$$M_C = 0$$

$$M_B = 0$$

$$M_H = 0$$

$$M_J = F \cdot CJ + p \cdot \frac{CJ^2}{2} = 20 \cdot 0,25 + 15 \cdot \frac{0,25^2}{2} = 5,46 \approx \underline{5,5 \text{ kNm} (-)}$$

$$M_A = F \cdot CA + p \cdot \frac{CA^2}{2} = 20 \cdot 0,5 + 15 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 11,8 \approx \underline{12 \text{ kNm} (-)}$$

$$M_G = F \cdot CG + p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AG \right) - F_A \cdot AG$$

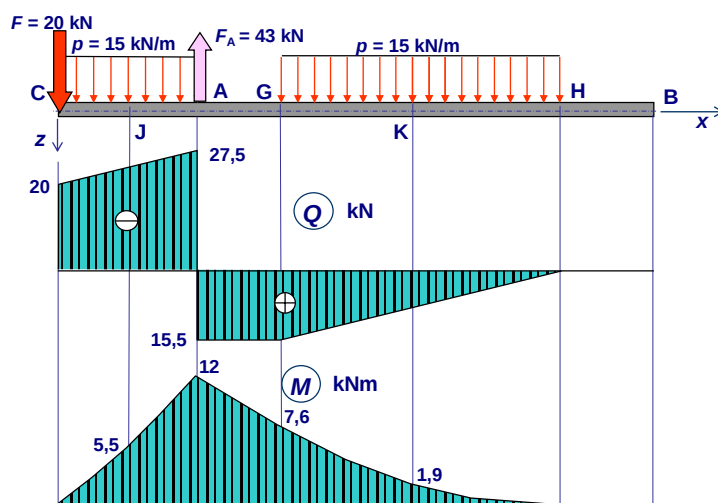
$$= 20 \cdot 0,8 + 15 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,5}{2} + 0,3 \right) - 43 \cdot 0,3 = 7,52 \approx \underline{7,6 \text{ kNm} (-)}$$

$$M_K = p \cdot \frac{KH^2}{2} =$$

$$= 15 \cdot \frac{0,5^2}{2} =$$

$$= 1,87 \approx \underline{1,9 \text{ kNm} (-)}$$

4.4. Paindemomendi M epüür (2)



Priit Põdra

PAINE: Keerukas koormus_1

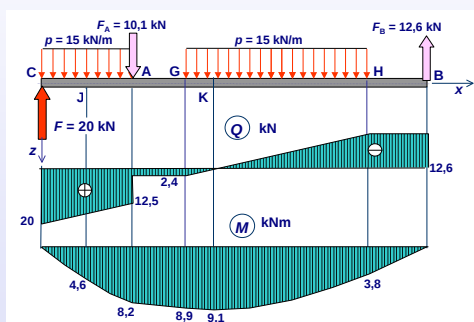
33

4.5. Lahendite võrdlus

Väiksemad sisejõudude väärtused



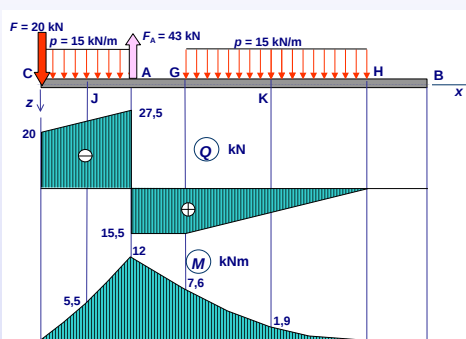
Suurem tugevusvaru



Suuremad sisejõudude väärtused



Väiksem tugevusvaru



Priit Põdra

PAINE: Keerukas koormus_1

34