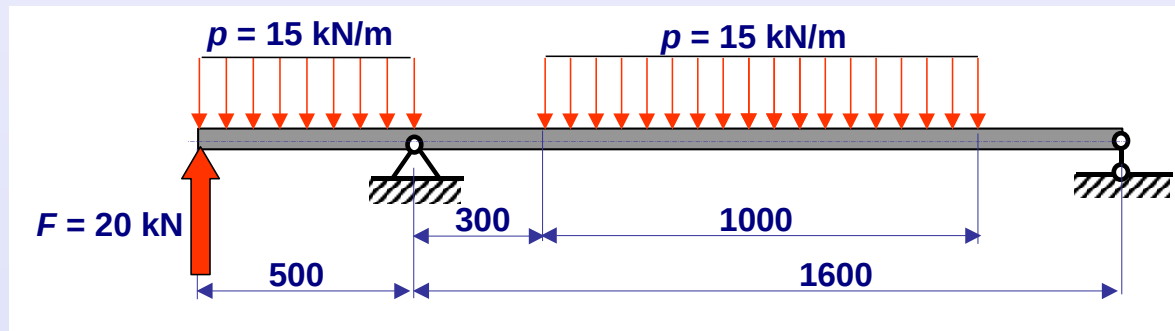


TUGEVUSÕPETUS

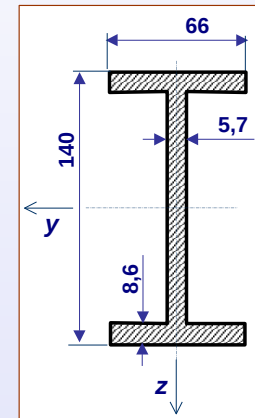
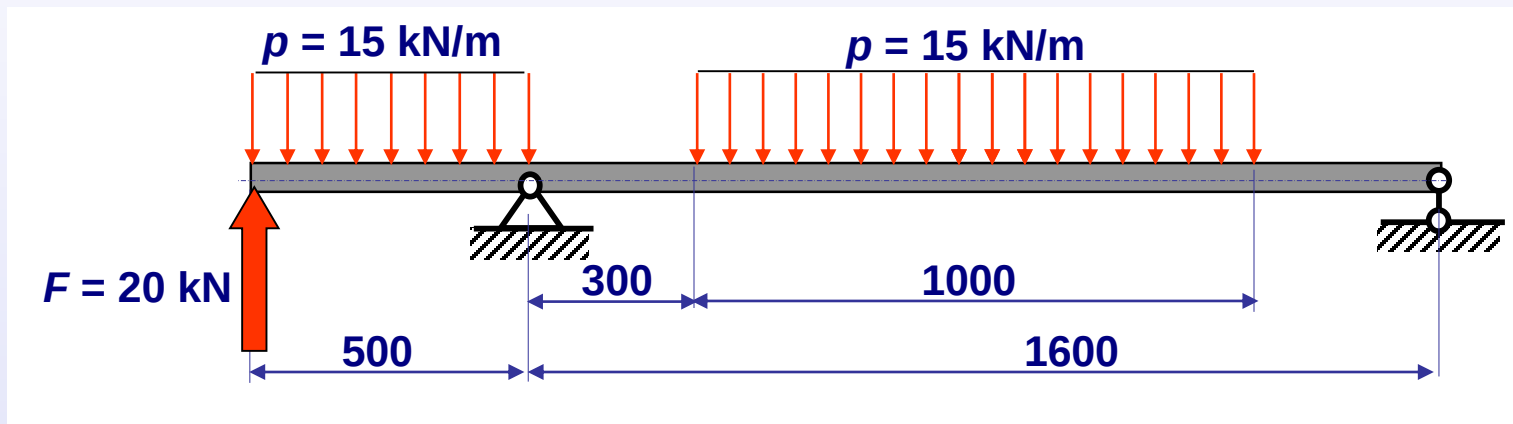
PAINE-DEFORMATSIOON: Keerukas koormus



1. Algandmed ja ülesande püstitus

1.1. Ühtlane konsooliga tala

Arvutada INP140-profiiliga tala läbipaine ja pöördenurk konsoolises otsas ning suurim läbipaine tugede vahel !

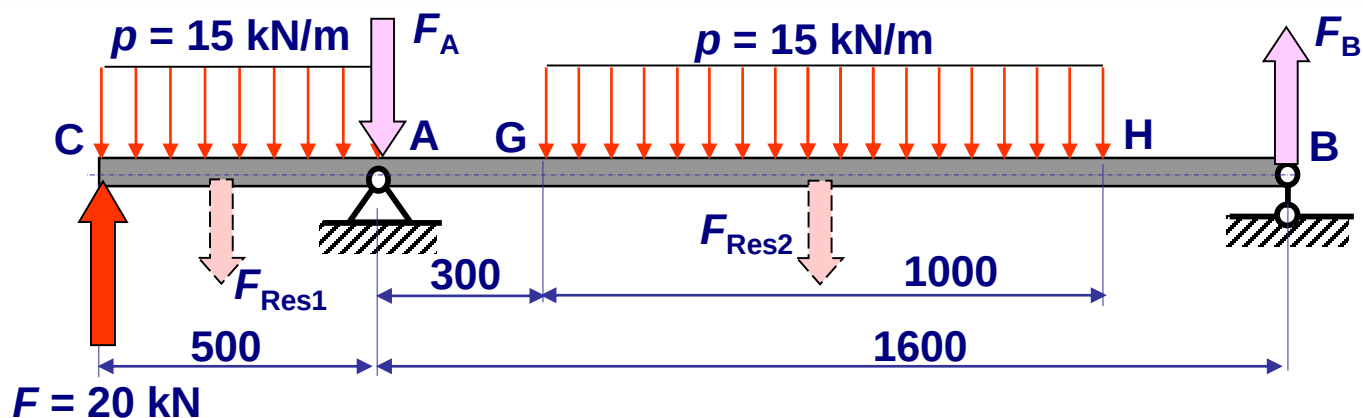


Materjal: teras S355

Elastusmoodul: $E = 210 \text{ GPa}$

Nõutav varutegur: $[s] = 2,5$

1.2. Toereaktsioonid (1)



1. tasakaaluvõrrand

$$\sum \mathcal{M}^{(A)} = 0$$

Kõikide
momentide
summa punkti
A suhtes

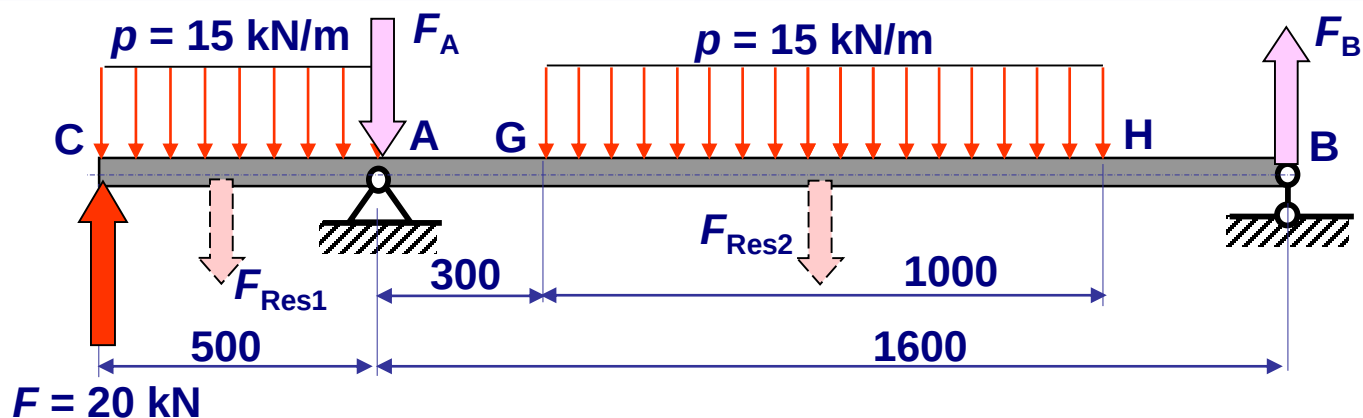
$$F \cdot CA - p \frac{CA^2}{2} + p \cdot GH \cdot \left(AG + \frac{GH}{2} \right) - F_B \cdot AB = 0$$

$$F_B = \frac{F \cdot CA - p \frac{CA^2}{2} + p \cdot GH \cdot \left(AG + \frac{GH}{2} \right)}{AB} =$$

$$= \frac{20 \cdot 0,5 - 15 \cdot \frac{0,5^2}{2} + 15 \cdot 1 \cdot \left(0,3 + \frac{1}{2} \right)}{1,6} = 12,57 \approx \underline{\underline{12,6 \text{ kN}}}$$

Pöördemomentide summa on otstarbekas arvutada sellise punkti suhtes, mida läbib mõne tundmatu väärtusega jõu mõjusirge (punktid A ja B)

1.2. Toereaktsioonid (2)



2. tasakaaluvõrrand

$$\sum \mathcal{M}^{(B)} = 0$$

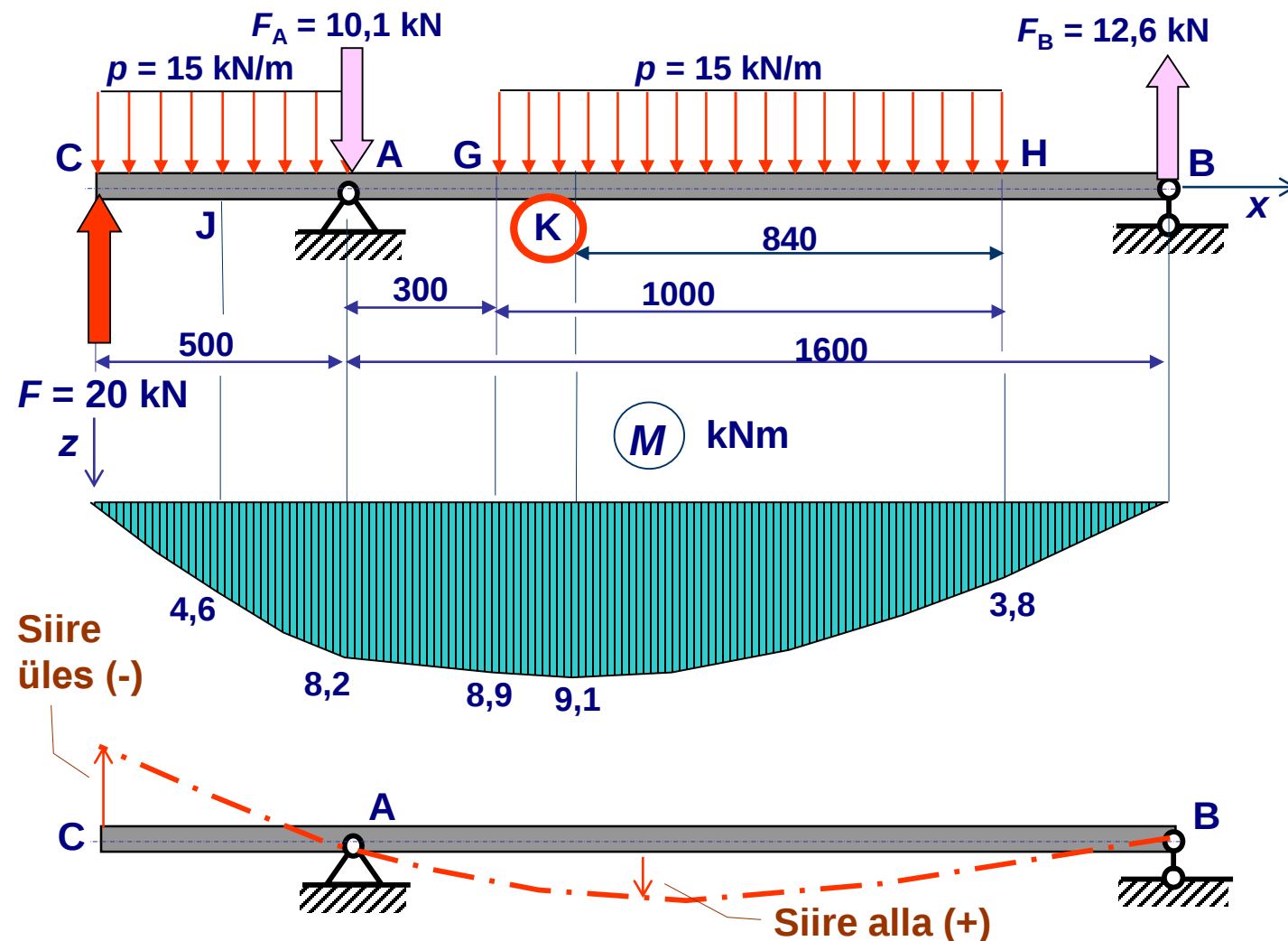
Kõikide
momentide
summa punkti
B suhtes

$$F \cdot CB - p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AB \right) - F_A \cdot AB - p \cdot GH \cdot \left(\frac{GH}{2} + HB \right) = 0$$

$$F_A = \frac{F \cdot CB - p \cdot CA \cdot \left(\frac{CA}{2} + AB \right) - p \cdot GH \cdot \left(\frac{GH}{2} + GB \right)}{AB} =$$

$$= \frac{20 \cdot 2,1 - 15 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,5}{2} + 1,6 \right) - 15 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0,3 \right)}{1,6} = 10,07 \approx \underline{\underline{10,1 \text{ kN}}}$$

1.3. Paindemomendi epüür



Sisejõudude analüüsi tulemused



Ohtlik ristlõige on K

$$M_K = 9,1 \text{ kNm}$$

Paindemomendi M epüür on ühemärgiline



Kogu tala on ühte pidi kõver (alumised kiud on tõmmatud)

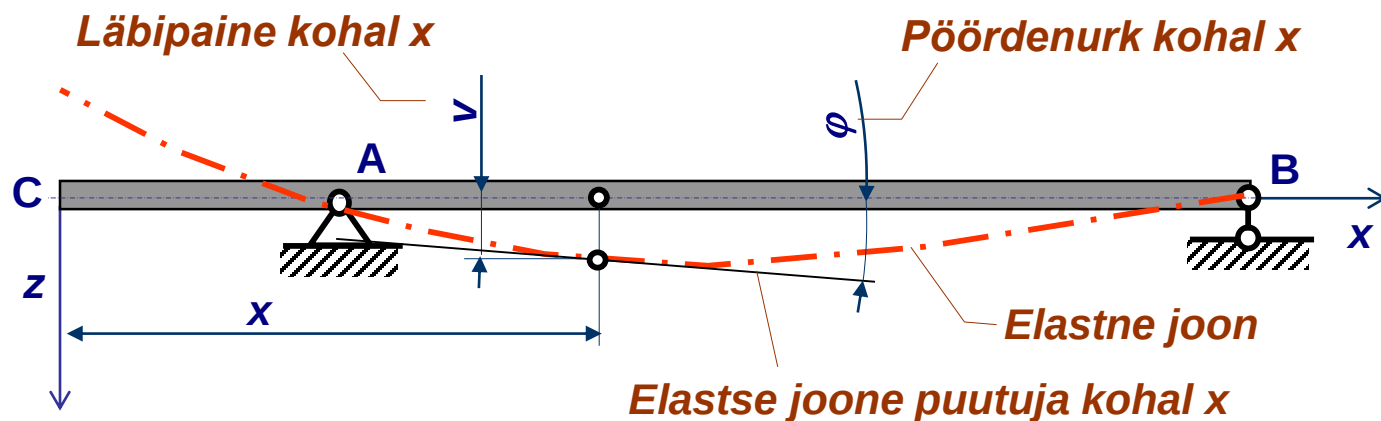
Konsoolse otsa C siire on üles

Tugede vahel on siire alla

Vt Tugevusõpetus I näide "PAINE: keerukas koormus 1"

2. Painde universaalvõrrandid

2.1. Painde universaalförrandid (1)



Läbipainde universaalförrand

Pöördenurga universaalförrand

$$\begin{aligned} \varphi EI = \varphi_0 EI &+ \sum \left[\mathcal{M} (x - a_{\mathcal{M}}) \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) \right] + \\ &+ \sum \left[F \frac{(x - a_F)^2}{2} \cdot H(x - a_F) \right] + \\ &+ \sum \left[p \frac{(x - a_p)^3}{6} \cdot H(x - a_p) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vEI = v_0 EI + \varphi_0 x EI &+ \sum \left[\mathcal{M} \frac{(x - a_{\mathcal{M}})^2}{2} \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) \right] + \\ &+ \sum \left[F \frac{(x - a_F)^3}{6} \cdot H(x - a_F) \right] + \\ &+ \sum \left[p \frac{(x - a_p)^4}{24} \cdot H(x - a_p) \right] \end{aligned}$$

2.1. Painde universaalförrandid (2)

Pöördenurga universaalförrand

$$\varphi EI = \varphi_0 EI + \sum \left[\mathcal{M}(x - a_{\mathcal{M}}) \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) \right] + \sum \left[F \frac{(x - a_F)^2}{2} \cdot H(x - a_F) \right] + \sum \left[p \frac{(x - a_p)^3}{6} \cdot H(x - a_p) \right]$$

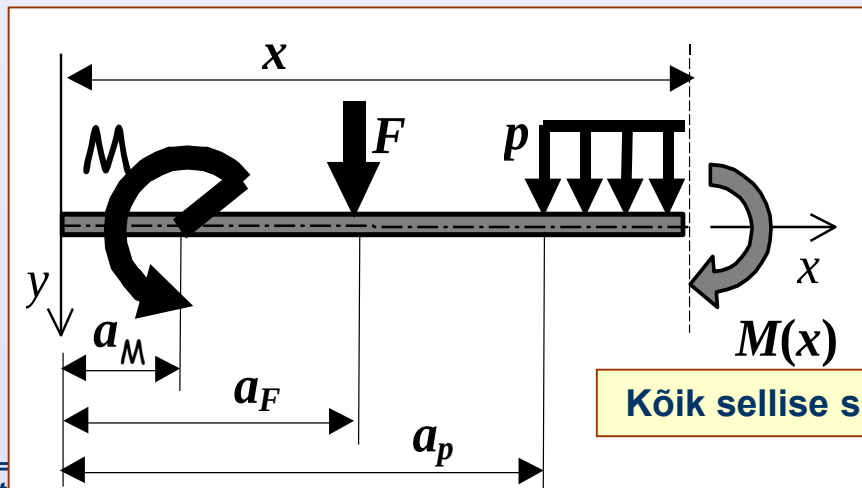
Läbipainde universaalförrand

$$vEI = \cancel{v_0 EI} + \cancel{\varphi_0 x EI} + \sum \left[\mathcal{M} \frac{(x - a_{\mathcal{M}})^2}{2} \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) \right] + \sum \left[F \frac{(x - a_F)^3}{6} \cdot H(x - a_F) \right] + \sum \left[p \frac{(x - a_p)^4}{24} \cdot H(x - a_p) \right]$$

Läbipaine kohal $x = 0$

Pöördenurk kohal $x = 0$

Koormuste mõju

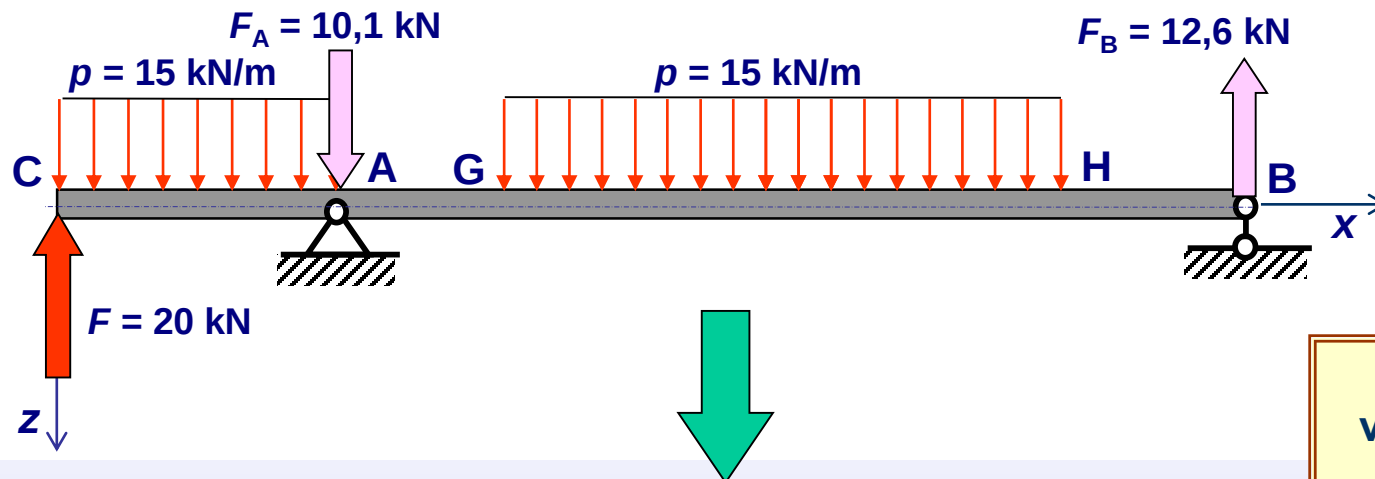


Heaviside'i funktsioon

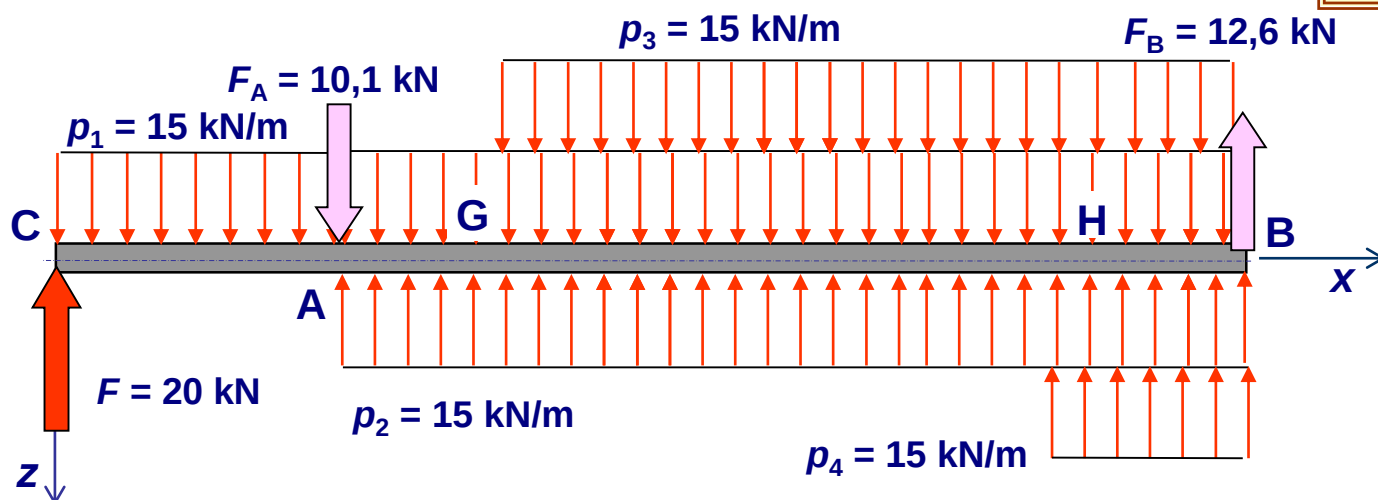
$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ 1, & \text{kui } x \geq a \end{cases}$$

Kõik sellise suunaga koormused on võrrandites märgiga "+"

2.2. Ekvivalentne arvutusskeem



Ekvivalentne arvutusskeem



Paindedeformatsioonide väärtused sõltuvad nii joonkoormuse algus- kui ka lõppkohast

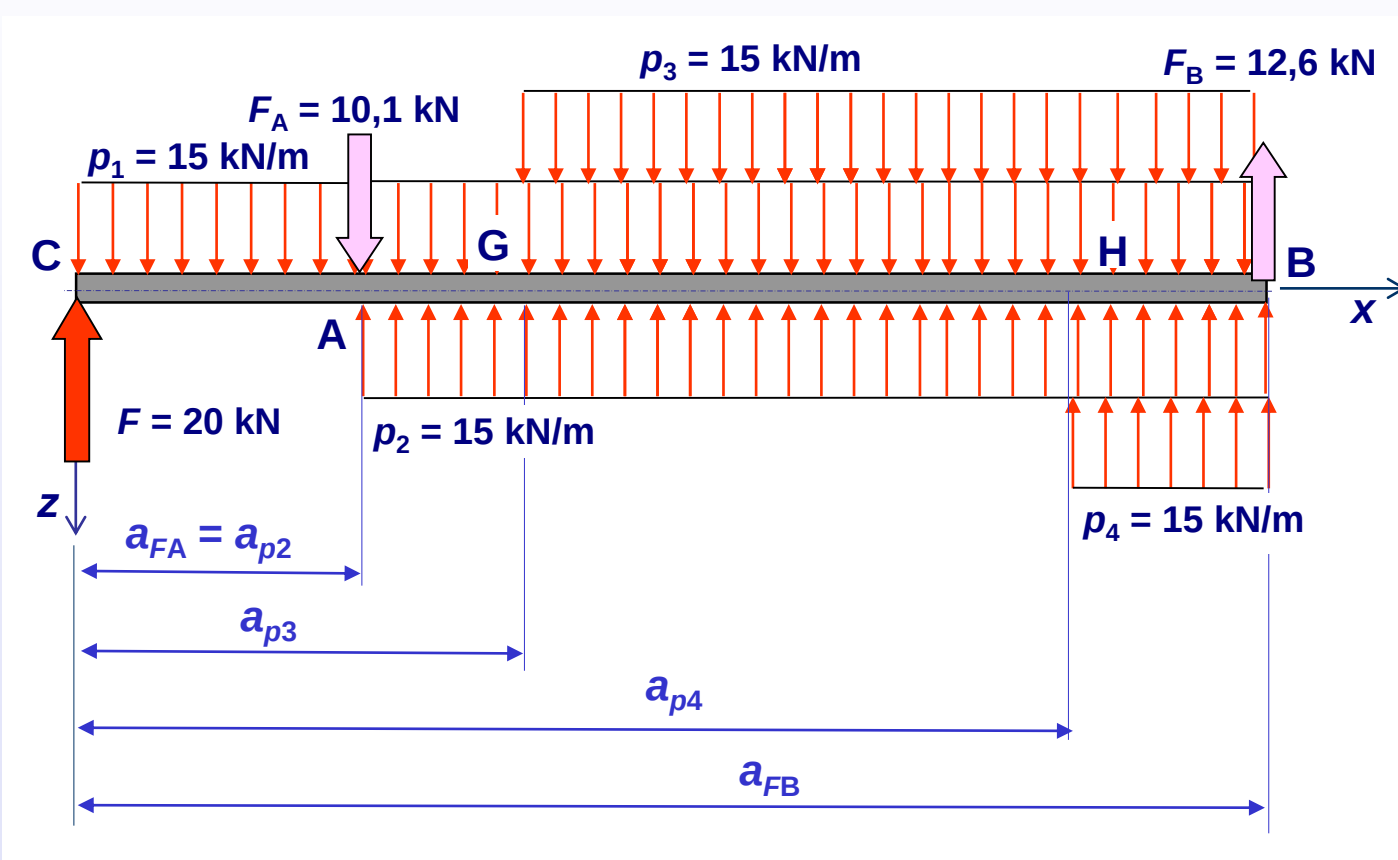
PROBLEEM: Universaalvõrranditesse läheb vaid iga joonkoormuse alguskoha koordinaat

Tala joonkoormusi tuleb muuta nii, et:

- kõik ulatusid kuni tala lõpuni ning
- joonkoormuste painutav mõju ei muutu

2.3. Universaalkõrrandite parameetrid

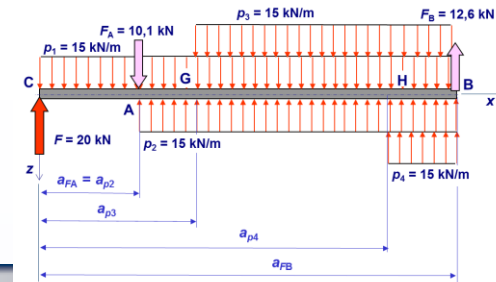
Ekvivalentne arvutuskeem



Universaalkõrrandite parameetrid

$F (-)$	$a_F = 0$
$F_A (+)$	$a_{FA} = 0,5 \text{ m}$
$F_B (-)$	$a_{FB} = 2,1 \text{ m}$
$p_1 (+)$	$a_{p1} = 0$
$p_2 (-)$	$a_{p2} = 0,5 \text{ m}$
$p_3 (+)$	$a_{p3} = 0,8 \text{ m}$
$p_4 (-)$	$a_{p4} = 1,8 \text{ m}$

2.4. Pöördenurga võrrand



$$\varphi EI = \varphi_0 EI + \sum [\mathcal{M}(x - a_{\mathcal{M}}) \cdot H(x - a_{\mathcal{M}})] + \sum \left[F \frac{(x - a_F)^2}{2} \cdot H(x - a_F) \right] + \sum \left[p \frac{(x - a_p)^3}{6} \cdot H(x - a_p) \right]$$

$H(x - 0) = 1$ alati

Heaviside'i funktsioon

$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ 1, & \text{kui } x \geq a \end{cases}$$

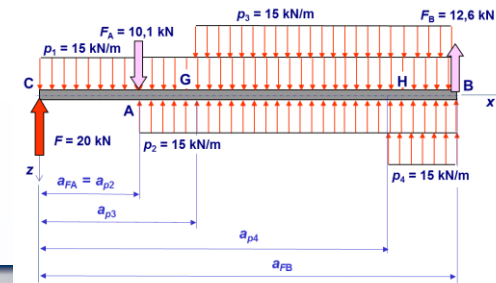
F_B jääb välja alati

$$\begin{aligned} \varphi EI = \varphi_0 EI & - \frac{F}{2} (x - a_F)^2 H(x - a_F) + \frac{F_A}{2} (x - a_{FA})^2 H(x - a_{FA}) - \\ & - \frac{F_B}{2} (x - a_{FB})^2 H(x - a_{FB}) + \\ & + \frac{p_1}{6} (x - a_{p1})^3 H(x - a_{p1}) - \frac{p_2}{6} (x - a_{p2})^3 H(x - a_{p2}) + \\ & + \frac{p_3}{6} (x - a_{p3})^3 H(x - a_{p3}) - \frac{p_4}{6} (x - a_{p4})^3 H(x - a_{p4}) \end{aligned}$$

$H(x - 0) = 1$ alati

$$\begin{aligned} \varphi EI = \varphi_0 EI & - \frac{F}{2} x^2 + \frac{F_A}{2} (x - 0,5)^2 H(x - 0,5) + \frac{p_1}{6} x^3 - \frac{p_2}{6} (x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + \\ & + \frac{p_3}{6} (x - 0,8)^3 H(x - 0,8) - \frac{p_4}{6} (x - 1,8)^3 H(x - 1,8) \end{aligned}$$

2.5. Läbipainde võrrand



$$vEI = v_0EI + \varphi_0 xEI + \sum \left[\mathcal{M} \frac{(x-a_M)^2}{2} \cdot H(x-a_M) \right] +$$

$$+ \sum \left[F \frac{(x-a_F)^3}{6} \cdot H(x-a_F) \right] +$$

$$+ \sum \left[p \frac{(x-a_p)^4}{24} \cdot H(x-a_p) \right]$$

$H(x - 0) = 1$ alati

Heaviside'i funktsioon

$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ 1, & \text{kui } x \geq a \end{cases}$$

$$vEI = v_0EI + \varphi_0 xEI - \frac{F}{6} (x - a_F)^3 H(x - a_F) + \frac{F_A}{6} (x - a_{FA})^3 H(x - a_{FA}) -$$

F_B jääb välja alati

$a_{FB} = x_{\max}$

$H(x - x_{\max}) = 0$, kui $x < x_{\max}$

$a_{p1} = 0$

$a_{p1} = 0$

$H(x - 0) = 1$ alati

$$- \frac{F_B}{6} (x - a_{FB})^3 H(x - a_{FB}) +$$

$$+ \frac{p_1}{24} (x - a_{p1})^4 H(x - a_{p1}) - \frac{p_2}{24} (x - a_{p2})^4 H(x - a_{p2}) +$$

$$+ \frac{p_3}{24} (x - a_{p3})^4 H(x - a_{p3}) - \frac{p_4}{24} (x - a_{p4})^4 H(x - a_{p4})$$



$$vEI = v_0EI + \varphi_0 xEI - \frac{F}{6} x^3 + \frac{F_A}{6} (x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + \frac{p_1}{24} x^4 - \frac{p_2}{24} (x - 0,5)^4 H(x - 0,5) +$$

$$+ \frac{p_3}{24} (x - 0,8)^4 H(x - 0,8) - \frac{p_4}{24} (x - 1,8)^4 H(x - 1,8)$$

2.6. Võrrandite algkujud

Pöördenurga universaalvõrrand

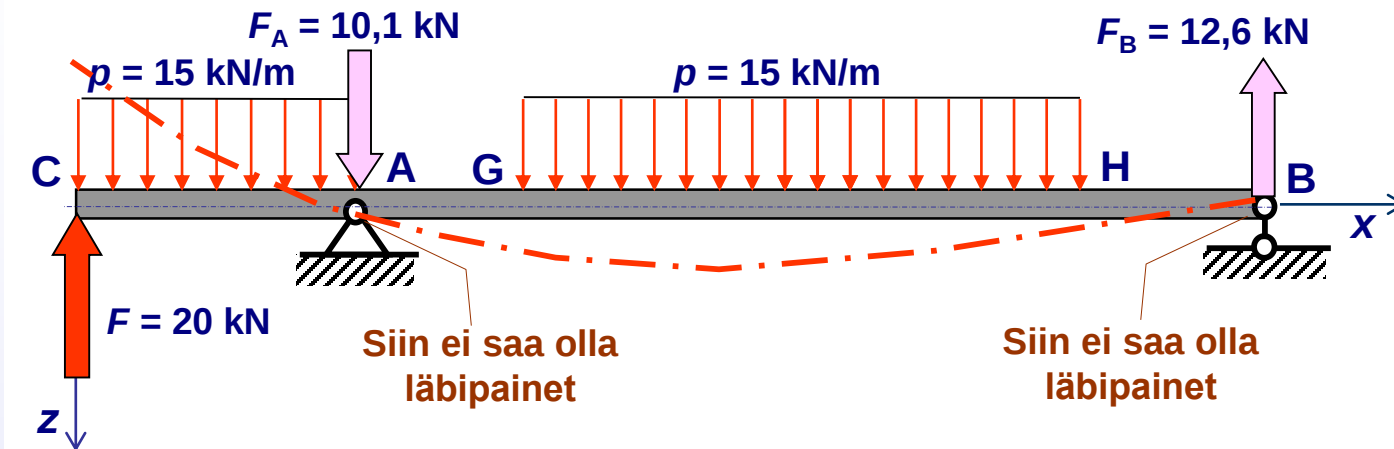
$$\varphi EI = \varphi_0 EI - \frac{F}{2} x^2 + \frac{F_A}{2} (x - 0,5)^2 H(x - 0,5) + \frac{p_1}{6} x^3 - \frac{p_2}{6} (x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + \\ + \frac{p_3}{6} (x - 0,8)^3 H(x - 0,8) - \frac{p_4}{6} (x - 1,8)^3 H(x - 1,8)$$

Läbipainde universaalvõrrand

$$v EI = v_0 EI + \varphi_0 x EI - \frac{F}{6} x^3 + \frac{F_A}{6} (x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + \frac{p_1}{24} x^4 - \frac{p_2}{24} (x - 0,5)^4 H(x - 0,5) + \\ + \frac{p_3}{24} (x - 0,8)^4 H(x - 0,8) - \frac{p_4}{24} (x - 1,8)^4 H(x - 1,8)$$

**Nende võrrandite abil saab arvutada iga ristlõike
(mille koordinat on x) pöördenurga ja läbipainde**

2.7. Parameetrid v_0 ja φ_0 (1)



Tugedel ei saa olla
läbipainet
kummaski suunas,
s.t. tuge del $v = 0$

Ääritingimused läbipainde võrrandile

Kui $x = CA = 0,5 \text{ m}$, siis $v = v_A = 0$

Kui $x = CB = 2,1 \text{ m}$, siis $v = v_B = 0$

$$vEI = v_0EI + \varphi_0 xEI - \frac{F}{6} x^3 + \frac{F_A}{6} (x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + \frac{p_1}{24} x^4 - \frac{p_2}{24} (x - 0,5)^4 H(x - 0,5) + \frac{p_3}{24} (x - 0,8)^4 H(x - 0,8) - \frac{p_4}{24} (x - 1,8)^4 H(x - 1,8)$$

2.7. Parameetrid v_0 ja φ_0 (2)

Kui $x = CA = 0,5 \text{ m}$, siis $v = 0$

$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ 1, & \text{kui } x \geq a \end{cases}$$

$$0 = v_0 EI + \varphi_0 \cdot 0,5 EI - \frac{F}{6} 0,5^3 + \frac{F_A}{6} \overbrace{(0,5 - 0,5)^3}^{=0} H(0,5 - 0,5) + \frac{p_1}{24} 0,5^4 - \frac{p_2}{24} \underbrace{(0,5 - 0,5)^4}_{=0} H(0,5 - 0,5) + \frac{p_3}{24} \underbrace{(0,5 - 0,8)^4}_{=0} H(0,5 - 0,8) - \frac{p_4}{24} \underbrace{(0,5 - 1,8)^4}_{=0} H(0,5 - 1,8)$$

REEGEL: Universaalförrandisse jäävad vaid need koormused, mis mõjuvad antud koordinaadist x vasakul

$$0 = v_0 EI + 0,5 \varphi_0 EI - \frac{20 \cdot 10^3}{6} \cdot 0,5^3 + \frac{15 \cdot 10^3}{24} \cdot 0,5^4 \Rightarrow v_0 EI + 0,5 \varphi_0 EI = 378$$

2.7. Parameetrid v_0 ja φ_0 (3)

Kui $x = CA = 2,1 \text{ m}$, siis $v = 0$

$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ 1, & \text{kui } x \geq a \end{cases}$$

$$0 = v_0 EI + \varphi_0 \cdot 2,1 EI - \frac{F}{6} 2,1^3 + \frac{F_A}{6} (2,1 - 0,5)^3 \overbrace{H(2,1 - 0,5)}^{=1} + \frac{p_1}{24} 2,1^4 - \frac{p_2}{24} (2,1 - 0,5)^4 \underbrace{H(2,1 - 0,5)}_{=1} +$$

$$+ \frac{p_3}{24} (2,1 - 0,8)^4 \underbrace{H(2,1 - 0,8)}_{=1} - \frac{p_4}{24} (2,1 - 1,8)^4 \underbrace{H(2,1 - 1,8)}_{=1}$$

$$0 = v_0 EI + 2,1 \varphi_0 EI - \frac{20 \cdot 10^3}{6} 2,1^3 + \frac{10,1 \cdot 10^3}{6} (2,1 - 0,5)^3 + \frac{15 \cdot 10^3}{24} 2,1^4 -$$

$$- \frac{15 \cdot 10^3}{24} (2,1 - 0,5)^4 + \frac{15 \cdot 10^3}{24} (2,1 - 0,8)^4 - \frac{15 \cdot 10^3}{24} (2,1 - 1,8)^4$$



$$v_0 EI + 2,1 \varphi_0 EI = 14136$$

2.8. Võrrandite lõppkujud

$$\left. \begin{array}{l} v_0 EI + 0,5\varphi_0 EI = 378 \\ v_0 EI + 2,1\varphi_0 EI = 14136 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi_0 EI \approx 8599 \\ v_0 EI \approx -3922 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{— } \varphi_0 \text{ on pöördenurk kohal } x = 0 \text{ ehk } \varphi_0 = \varphi_C \\ \text{— } v_0 \text{ on läbipaine kohal } x = 0 \text{ ehk } v_0 = v_C \end{array}$$

Pöördenurga universaalvõrrand

$$\varphi EI = 8599 - 10000x^2 + 5050(x - 0,5)^2 H(x - 0,5) + 2500x^3 - 2500(x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + \\ + 2500(x - 0,8)^3 H(x - 0,8) - 2500(x - 1,8)^3 H(x - 1,8)$$

Läbipainde universaalvõrrand

$$v EI = -3922 + 8599x - 3330x^3 + 1683(x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + 625x^4 - 625(x - 0,5)^4 H(x - 0,5) + \\ + 625(x - 0,8)^4 H(x - 0,8) - 625(x - 1,8)^4 H(x - 1,8)$$

3. Konsoolse otsa siirded

3.1. Tala ristlõike parameetrid

Telg-tugevusmomnt

$$W_x = 81,9 \text{ cm}^3$$

Tabeli W_x vastab selles
ülesandes W_y -le

Telg-inertsimomnt

$$I_x = 573 \text{ cm}^4$$

Tabeli I_x vastab selles
ülesandes I_y -le

INP-PALKIT

INP beam

Teräslaji

Tolerantsi

Todistus S235

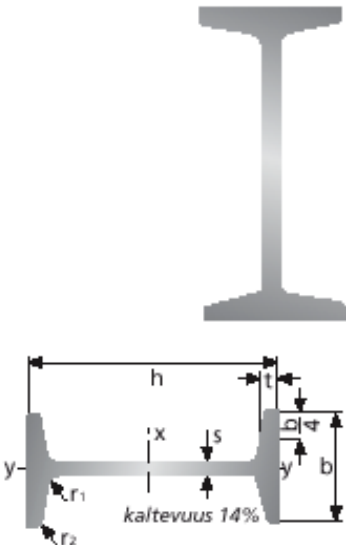
SFS-EN 10 025

SFS-EN 10 204/3.1.B

DIN 17100

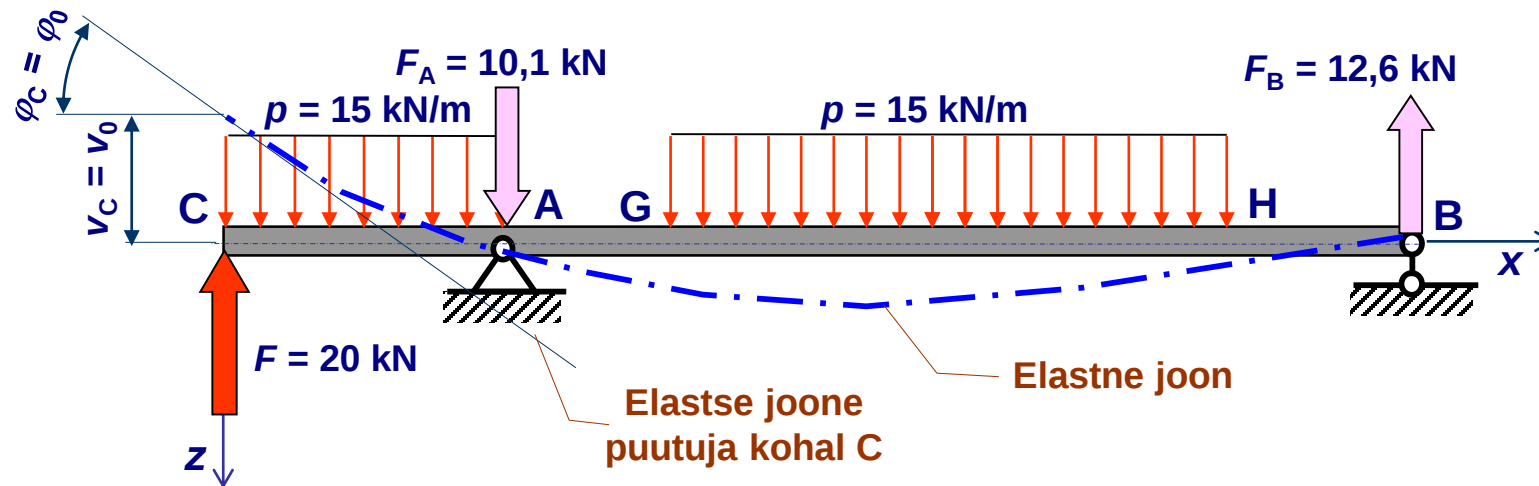
DIN 1025/1

DIN 50 049/3.1.B

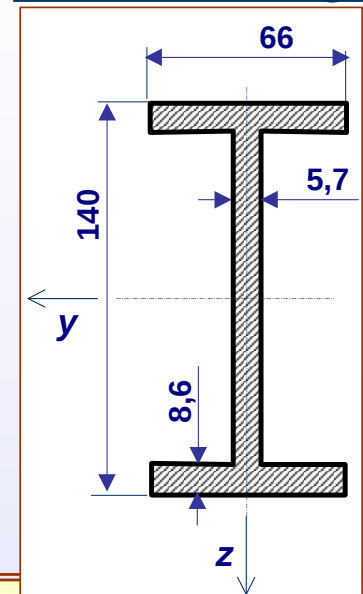


No	Mitat ja painot								Staatiset arvot					
	h	b	s	t	r ₂	Vaippa	Poikki-pinta	Paino	I _x	W _x	i _x	I _y	W _y	i _y
	mm	mm	mm	mm	mm	m ² /m	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
80	80	42	3,9	5,9	2,3	0,304	7,57	5,94	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
100	100	50	4,5	6,8	2,7	0,370	10,60	8,34	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
120	120	58	5,1	7,7	3,1	0,438	14,28	11,18	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,33
140	140	66	5,7	8,6	3,4	0,502	18,20	14,30	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
160	160	74	6,3	9,5	3,8	0,575	22,80	17,90	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
180	180	82	6,9	10,4	4,1	0,640	27,90	21,90	1430	161	7,20	81,3	19,8	1,71

3.2. Konsoolse otsa läbipaine ja pöördenenurk



INP140 ristlõige



Konsoolse otsa läbipaine

$$v_0 EI \approx -3922 \quad \Rightarrow \quad v_C = v_0 = \frac{-3922}{EI} = \frac{-3922}{210 \cdot 10^9 \cdot 573 \cdot 10^{-8}} = -0,00325 \text{ m} \approx \underline{\underline{-3,3 \text{ mm}}}$$

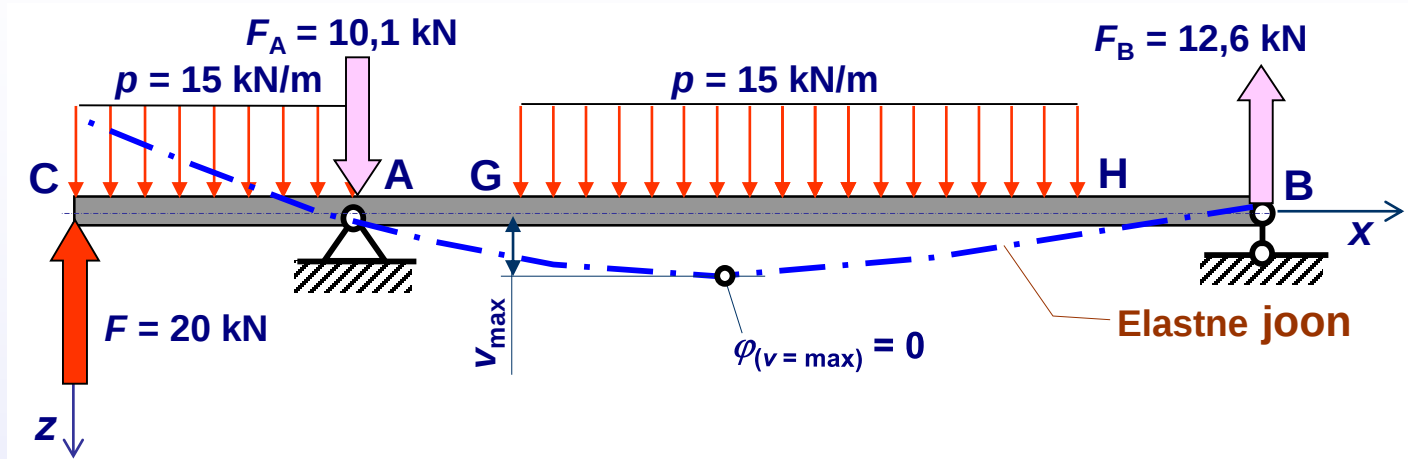
"-" näitab, et siire on z-telje negatiivses suunas, ehk üles

Konsoolse otsa pöördenenurk

$$\varphi_0 EI \approx 8599 \quad \Rightarrow \quad \varphi_C = \varphi_0 = \frac{8599}{EI} = \frac{8599}{210 \cdot 10^9 \cdot 573 \cdot 10^{-8}} = 0,00714 \approx \underline{\underline{0,0071 \text{ rad} \approx 0,41^\circ}}$$

4. Suurim läbipaine tugede vahel

4.1. Suurima läbipainde asukoha määramine



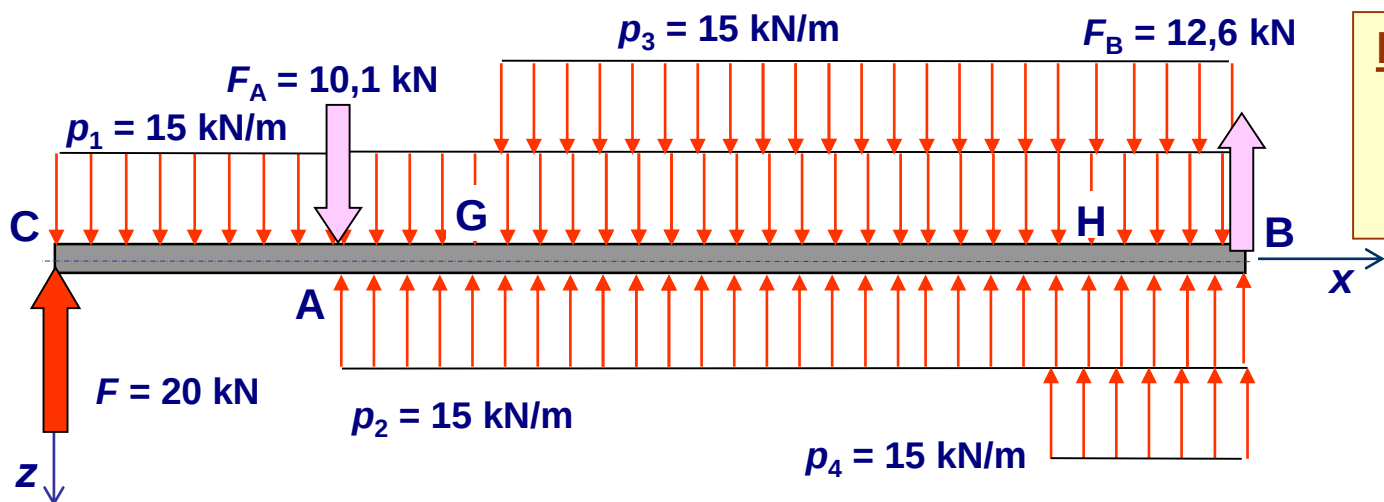
PROBLEEM: Suurima läbipainde asukoht telgede vahel ei ole teada

Läbipaine tugede vahel on **SUURIM** seal, kus elastse joone puutuja on horisontaalne ehk kohal, kus $\varphi = 0$

PROGNOOS: Suurima läbipainde asukoht telgede vahel paikneb lõigul GH

Tuleb varda lõigul GH otsida üles koht, kus elastse joone pöördenurk $\varphi = 0$

4.2. Elastse joone võrrand lõigul GH



REEGEL: Universaalvõrrandisse jäävad vaid need koormused, mis mõjuvad antud koordinaadist x vasakul

Lõigu GH jaoks tulevad võrrandisse koormused (mille $H = 1$)

$F; F_A; p_1; p_2; p_3$

$$\varphi EI = 8599 - 10000x^2 + 5050(x - 0,5)^2 H(x - 0,5) + 2500x^3 - 2500(x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + 2500(x - 0,8)^3 H(x - 0,8) - 2500(x - 1,8)^3 H(x - 1,8)$$

$$\varphi_{GH} EI = 8599 - 10000x^2 + 5050(x - 0,5)^2 + 2500x^3 - 2500(x - 0,5)^3 + 2500(x - 0,8)^3$$

Otsida selline x lõigul GH, mille korral $\varphi_{GH} EI = 0$

4.3. Suurima läbipainde asukoht (1)

Pöördenurga võrrand lõigule GH

$$\varphi_{GH} EI = 8599 - 10000x^2 + 5050(x - 0,5)^2 + 2500x^3 - 2500(x - 0,5)^3 + 2500(x - 0,8)^3$$

Juhul, kui selline x , mille korral $\varphi_{GH} EI = 0$, lõigul GH puudub, ei asu suurim läbipaine sellel lõigul GH

Kuupvõrrandit saab lahendada Cardano valemitega



LIHTSAM on lahendit otsida proovimise teel

HÜPOTEES: Suurim läbipaine on tugede vahel keskel, kus $x = 1,3$ m

$$\varphi_{GH} EI = 8599 - 10000 \cdot 1,3^2 + 5050(1,3 - 0,5)^2 + 2500 \cdot 1,3^3 - 2500(1,3 - 0,5)^3 + 2500(1,3 - 0,8)^3 = -544$$

$-544 \neq 0$; märk "-" näitab, et otsitav koht on antud kohast vasakul

Kui $x = 1,2$ m

$$\varphi_{GH} EI = 8599 - 10000 \cdot 1,2^2 + 5050(1,2 - 0,5)^2 + 2500 \cdot 1,2^3 - 2500(1,2 - 0,5)^3 + 2500(1,2 - 0,8)^3 = 296$$

$296 \neq 0$; märk "+" näitab, et otsitav koht on antud kohast paremal, s.t. lõigul $x = (1,2 \dots 1,3)$ m ning lähemal kohale $x = 1,2$ m

4.3. Suurima läbipainde asukoht (2)

Kui $x = 1,23$ m

$$\varphi_{GH} EI = 8599 - 10000 \cdot 1,23^2 + 5050(1,23 - 0,5)^2 + 2500 \cdot 1,23^3 - 2500(1,23 - 0,5)^3 + 2500(1,23 - 0,8)^3 = \underline{39,5}$$

$39,5 \neq 0$; märk "+" näitab, et otsitav koht on antud kohast paremal

Kui $x = 1,24$ m

$$\varphi_{GH} EI = 8599 - 10000 \cdot 1,24^2 + 5050(1,24 - 0,5)^2 + 2500 \cdot 1,24^3 - 2500(1,24 - 0,5)^3 + 2500(1,24 - 0,8)^3 = \underline{-45,16}$$

$-45,16 \neq 0$; märk "-" näitab, et otsitav koht on antud kohast vasakul

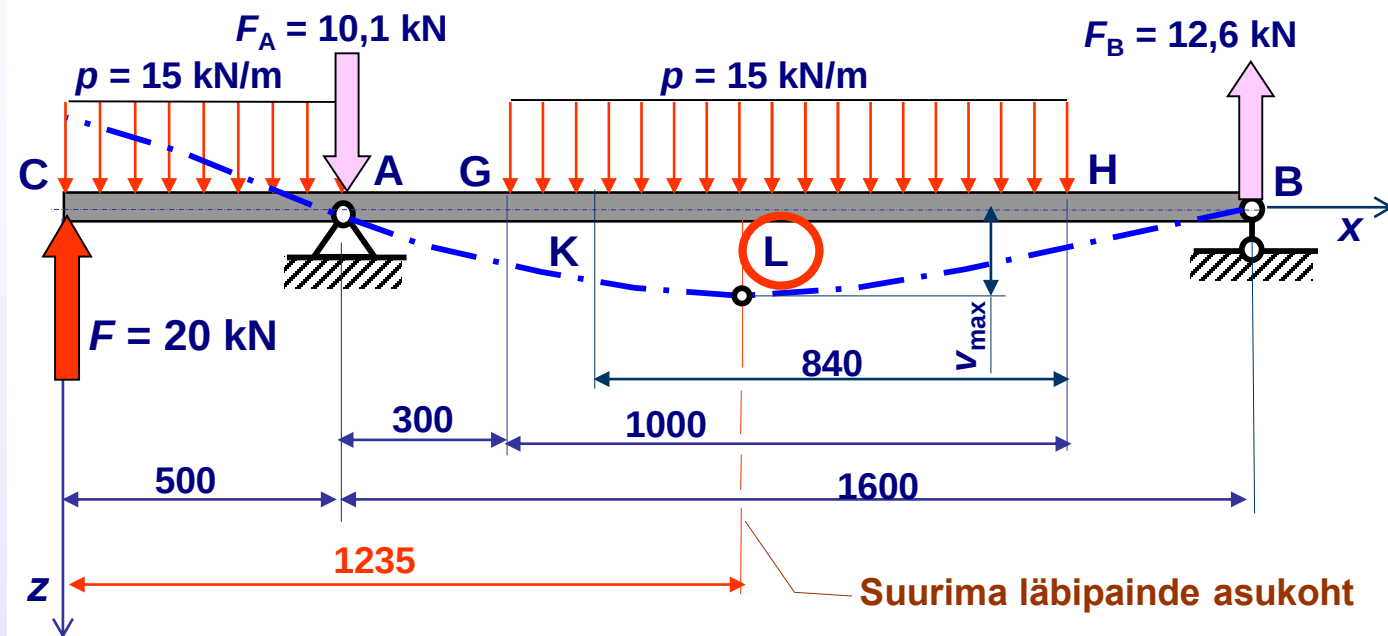
Tala suurima läbipainde asukoht on piirkonnas: $x = (1,23 \dots 1,24)$ m ligikaudu keskel

Suurima läbipainde koordinaat lõigul GH

$$x_{v=\max} = v_L \cong \frac{1,23 + 1,24}{2} = \underline{1,235 \text{ m}}$$

Asukoha täpsemaks tuvastamiseks puudub praktiline vajadus

4.4. Tala suurim läbipaine tugede vahel (1)



Arvutada tala
läbipaine
kohal L
($x_L = 1,235 \text{ m}$)

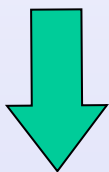
$$vEI = -3922 + 8599x - 3330x^3 + 1683(x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + 625x^4 - 625(x - 0,5)^4 H(x - 0,5) + 625(x - 0,8)^4 H(x - 0,8) - 625(x - 1,8)^4 H(x - 1,8)$$

4.4. Tala suurim läbipaine tugede vahel (1)

$$vEI = -3922 + 8599x - 3330x^3 + 1683(x - 0,5)^3 H(x - 0,5) + 625x^4 - 625(x - 0,5)^4 H(x - 0,5) + 625(x - 0,8)^4 H(x - 0,8) - 625(x - 1,8)^4 H(x - 1,8)$$

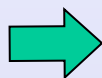


$$v_L EI = -3922 + 8599 \cdot 1,235 - 3330 \cdot 1,235^3 + 1683(1,235 - 0,5)^3 \overbrace{H(1,235 - 0,5)}^{=1} + 625 \cdot 1,235^4 - \overbrace{625(1,235 - 0,5)^4}^{=1} \overbrace{H(1,235 - 0,5)}^{=1} + 625(1,235 - 0,8)^4 \overbrace{H(1,235 - 0,8)}^{=1} - \underbrace{625(1,235 - 1,8)^4 H(1,235 - 1,8)}_{=0}$$



Läbipaine ristlõikes L

$$v_L EI = 2365,3 \approx 2365$$

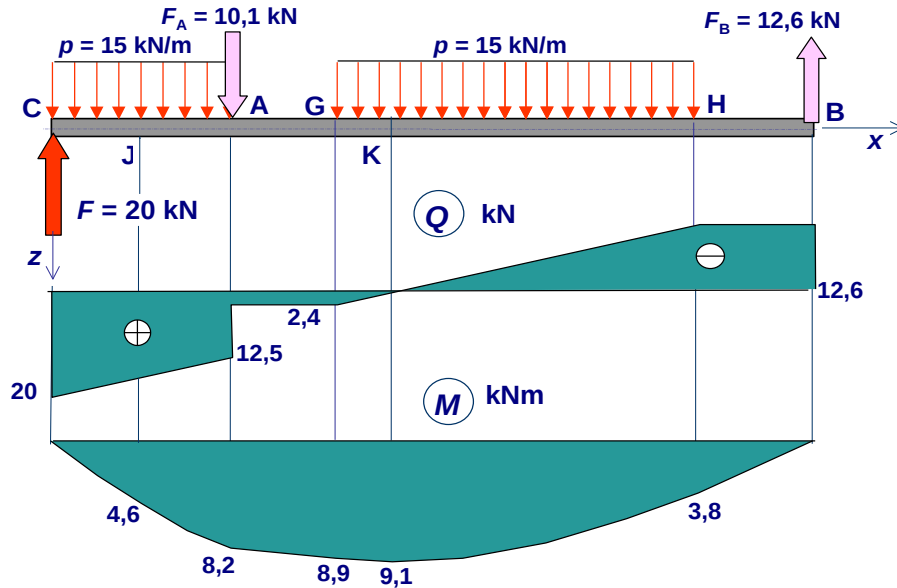


$$v_L = \frac{2365}{EI} = \frac{2365}{210 \cdot 10^9 \cdot 573 \cdot 10^{-8}} = 0,00196 \text{ m} \approx \underline{2,0 \text{ mm}}$$

”+” näitab, et siire on z-telje positiivses suunas, ehk alla

5. Tala tugevuse kontroll

5.1. Tala tugevusvarutegur



Ühtlase tala ohtlik ristlõike on K

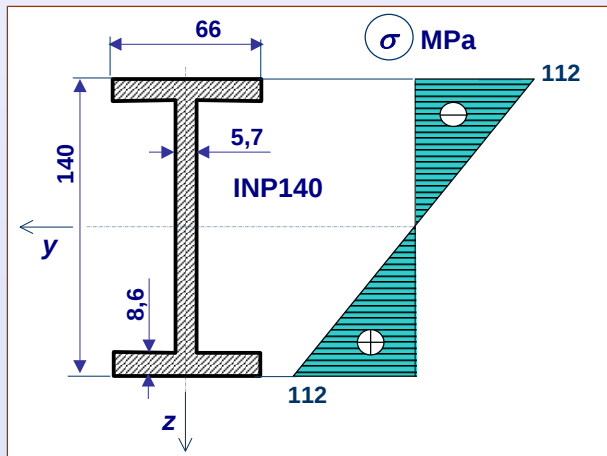
Suurim paindepinge

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{9,1 \cdot 10^3}{81,9 \cdot 10^{-6}} = 111,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx \underline{112 \text{ MPa}}$$

Tugevuse kontroll paindel

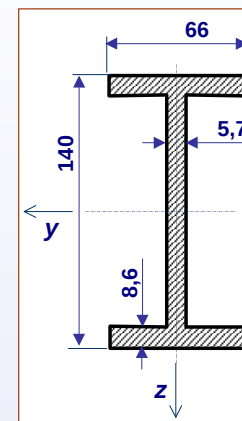
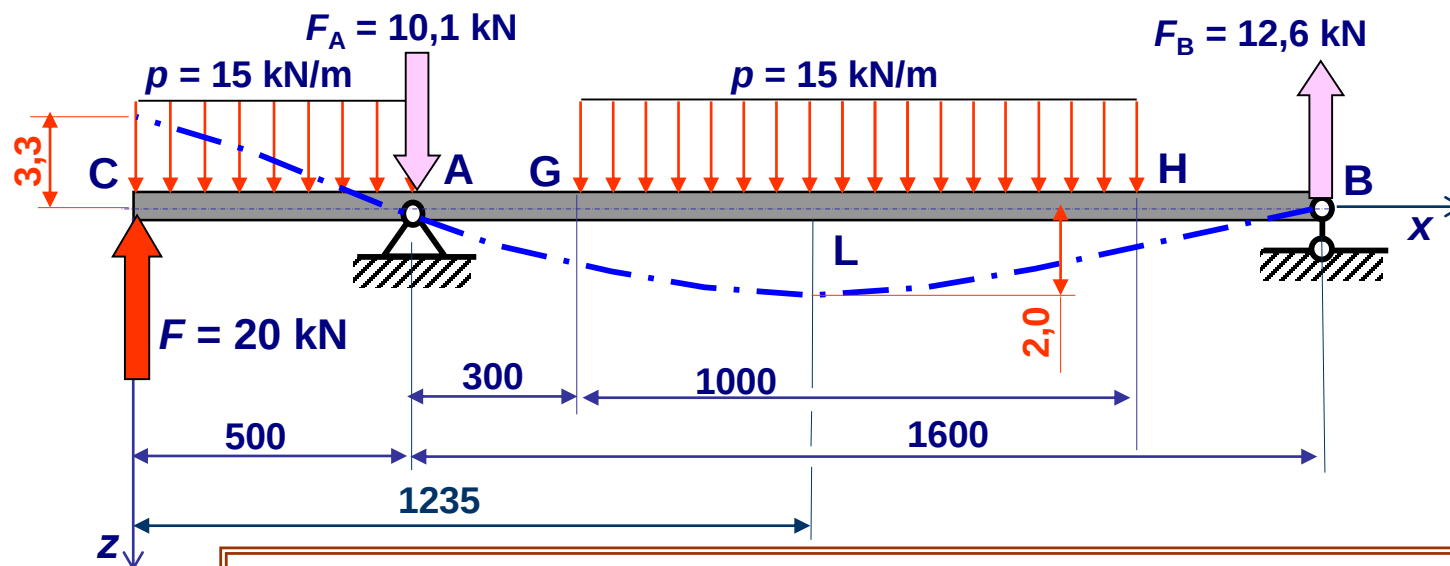
$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} = \frac{355}{112} = 3,16 \approx \underline{3,1} \geq [S] = 2,5$$

Ristlõike K tugevus paindel on tagatud



6. Jätakuülesanne

6.1. Jätkuülesande püstitus



Kontrollida läbipainete väärtusi
ristlõigetes C ja L Mohr'i algoritmi abil !

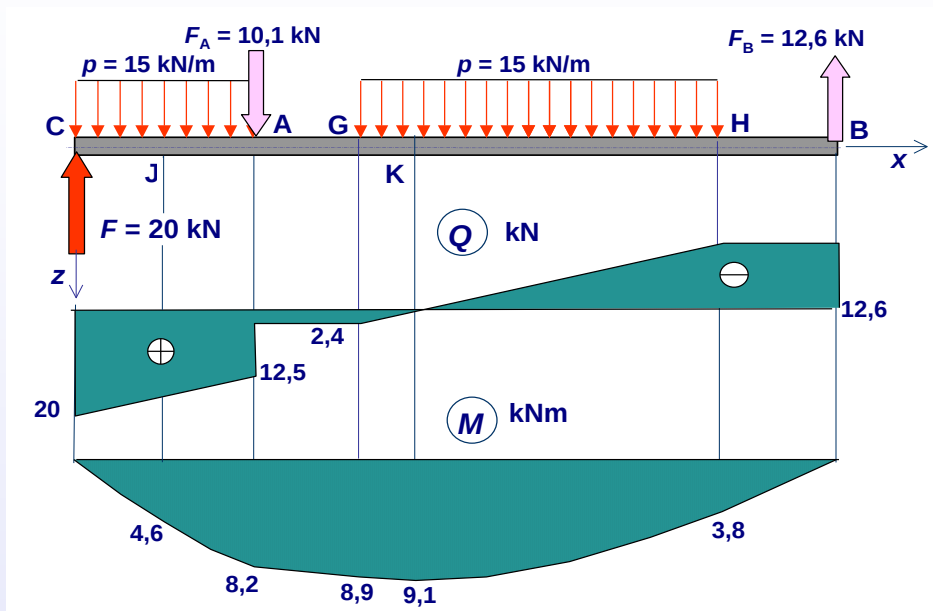
Materjal: teras S355

Elastusmoodul: $E = 210 \text{ GPa}$

Ristlõike profiil: INP140

Ristlõike inertsimoment: $I = 573 \text{ cm}^4$

6.2. Mohr'i algoritm paindesiirete arvutamiseks



1. Koostatakse tala paindemomendi M epüür
2. Paindemomendi M epüür jagatakse pidevateks lõikudeks
3. Tala selles kohas, mille läbipainet on tarvis arvutada, rakendatakse ühikjõud $F = 1$
4. Koostatakse ühikjõule vastav tala paindemomendi epüür m
5. Paindemomendi m epüür jagatakse pidevateks lõikudeks

6. Paindemomentide M ja m funktsioonid viiakse Mohr'i algoritmi

Läbipaine
antud kohas

$$vEI = \int_0^l M m dx = \int_0^{l_1} M_1 m_1 dx + \int_{l_1}^{l_2} M_2 m_2 dx + \dots + \int_{l_{(n-1)}}^{l_n} M_n m_n dx$$

Tala paindejäikus

l = tala pikkus

n = paindemomentide M ja m
ühiste pidevusvahemike arv

6.3. Paindemomendi M pidevusvahemikud

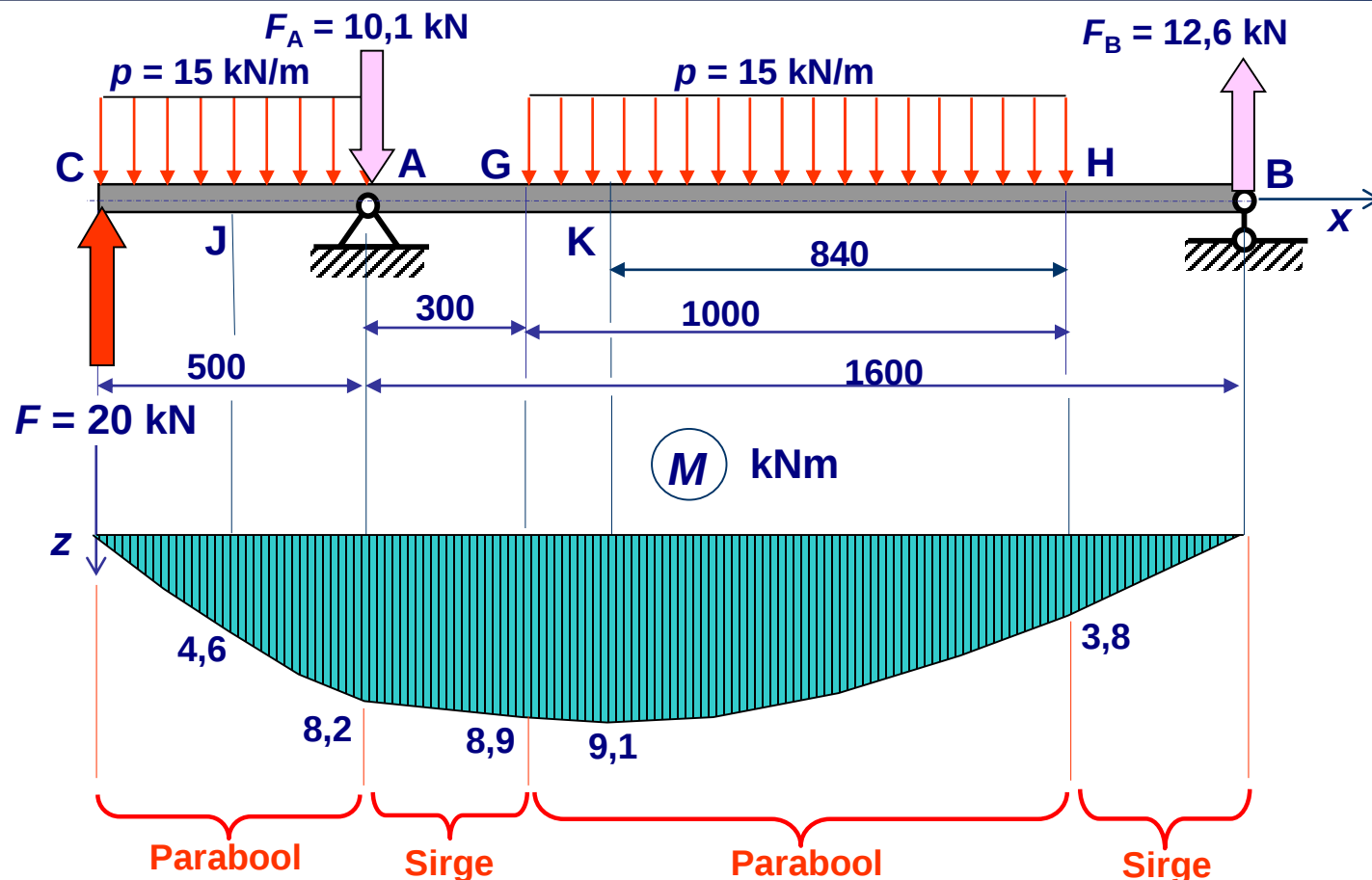
Paindemomendi M pidevusvahemikud

1. Lõik CA: paindemomendi funktsioon on parabool

2. Lõik AG: paindemomendi funktsioon on sirge

3. Lõik GH: paindemomendi funktsioon on parabool

4. Lõik HB: paindemomendi funktsioon on sirge



6.4. Ristlõike C läbipaine

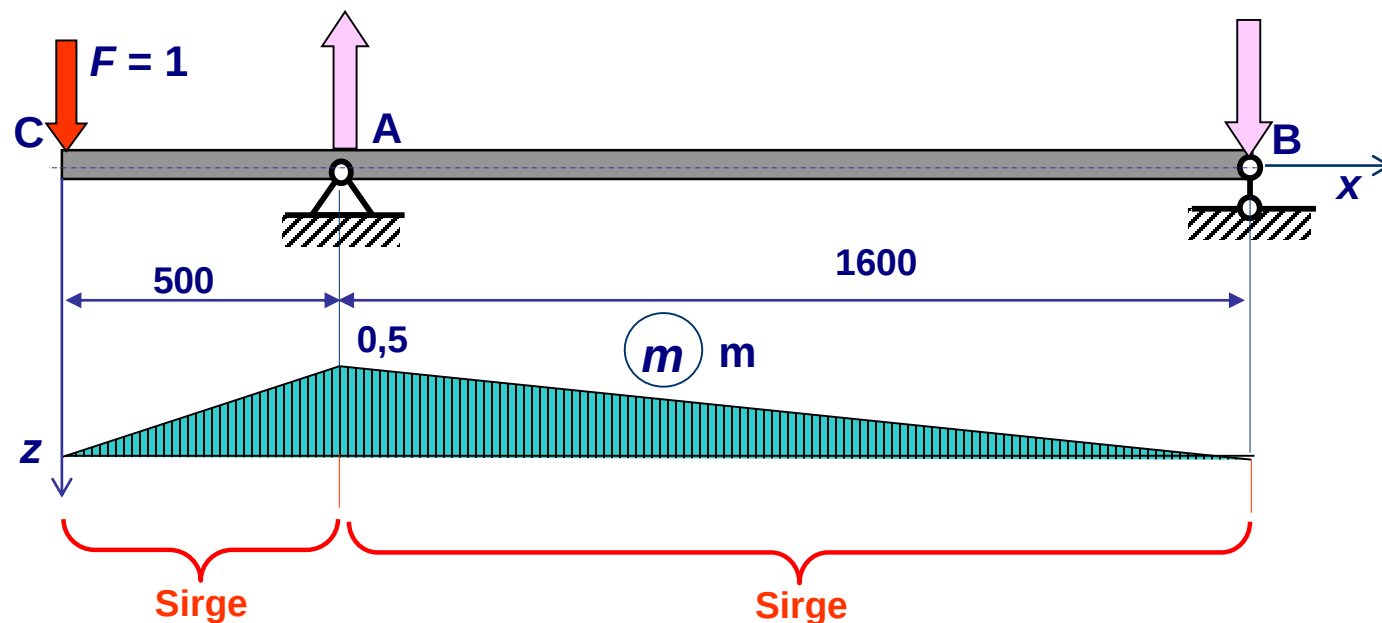
6.4.1. Ristlõike C ühikjõu paindemoment

$$F_B = 12,6 \text{ kN}$$

Ristlõikes C on tarvis
arvutada läbipainde
väärtus



Ristlõikes C
rakendatakse
ühikjõud $F = 1$



Paindemomendi m väärtused

$$m_C = 0$$

$$m_A = F \cdot CA = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ m } (-)$$

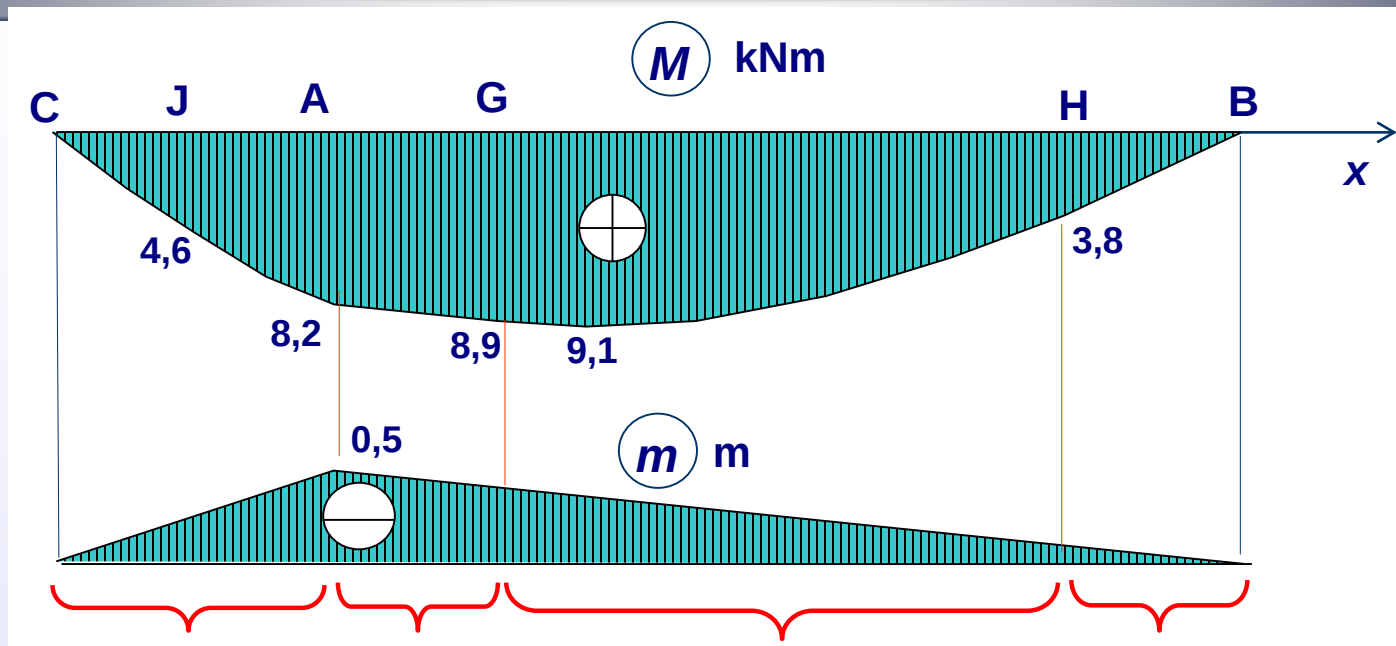
$$m_B = 0$$

Negatiivsed kiud
on tõmmatud

Paindemomendi m pidevusvahemikud

1. Lõik CA: paindemomendi funktsioon on sirge
2. Lõik AB: paindemomendi funktsioon on sirge

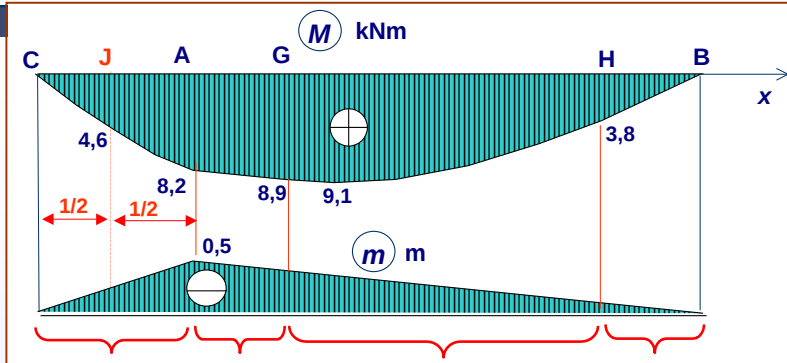
6.4.2. Ristlõike C läbipainde *Mohr*'i valem



Ristlõike C läbipaine

$$v_C EI = \int_C^B M m dx = \underbrace{\int_C^A M_{CA} m_{CA} dx}_{\text{Pidevus- vahemik CA}} + \underbrace{\int_A^G M_{AG} m_{AG} dx}_{\text{Pidevus- vahemik AG}} + \underbrace{\int_G^H M_{GH} m_{GH} dx}_{\text{Pidevus- vahemik GH}} + \underbrace{\int_H^B M_{HB} m_{HB} dx}_{\text{Pidevus- vahemik HB}}$$

6.4.3. Mohr'i integraal pidevusvahemikule CA



Parameetrid Simpson'i valemisse

$$x_1 = x_C = 0 \quad x_2 = x_A = 0,5 \text{ m} \quad x_3 = x_J = 0,25 \text{ m}$$

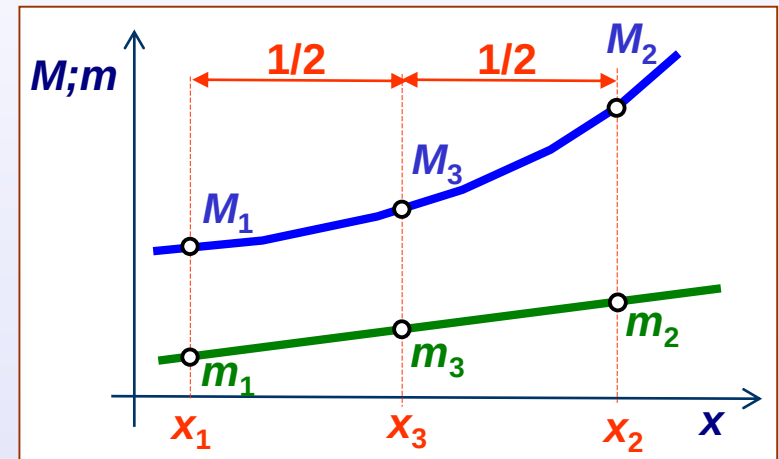
$$M_1 = M_C = 0 \quad m_1 = m_C = 0$$

$$M_2 = M_A = 8,2 \text{ kNm} \quad m_2 = m_A = -0,5$$

$$M_3 = M_J = 4,6 \text{ kNm} \quad m_3 = m_J = -0,25$$

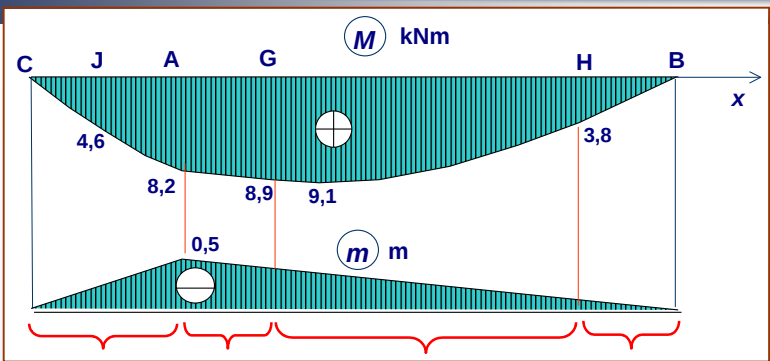
Simpson'i valem (numbriline integreerimine)

$$\int_{x_1}^{x_2} M m dx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4M_3 m_3 + M_2 m_2)$$



$$\begin{aligned} \int_C^A M_{CA} m_{CA} dx &= \frac{x_A - x_C}{6} (M_C m_C + 4M_J m_J + M_A m_A) = \\ &= \frac{0,5 - 0}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 4600 \cdot (-0,25) + 8200 \cdot (-0,5)] = \underline{\underline{-725 \text{ Nm}^3}} \end{aligned}$$

6.4.4. Mohr'i integraal pidevusvahemikule AG (1)

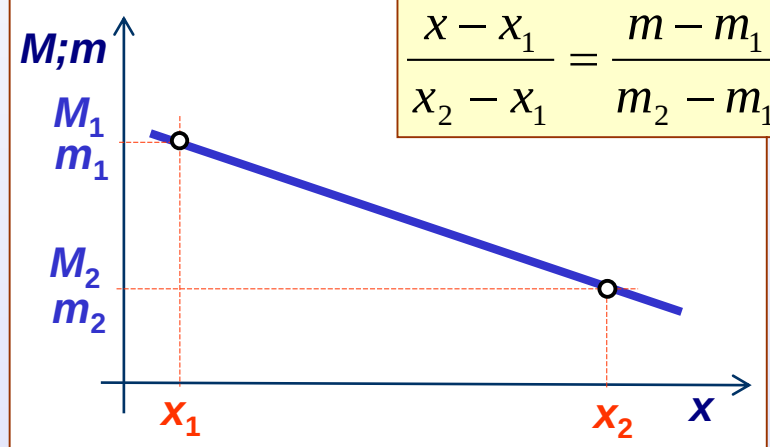


Lineaarfunktsioone saab integreerida analüütiliselt (võib ka Simpson'i valemiga)

Sirge võrrandi tuletamine

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{M - M_1}{M_2 - M_1}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m - m_1}{m_2 - m_1}$$



Paindemomendi M funktsioon lõigus AG

$$x_1 = x_A = 0,5 \text{ m} \quad x_2 = x_G = 0,8 \text{ m}$$

$$M_1 = M_A = 8,2 \text{ kNm} \quad M_2 = M_G = 8,9 \text{ kNm}$$

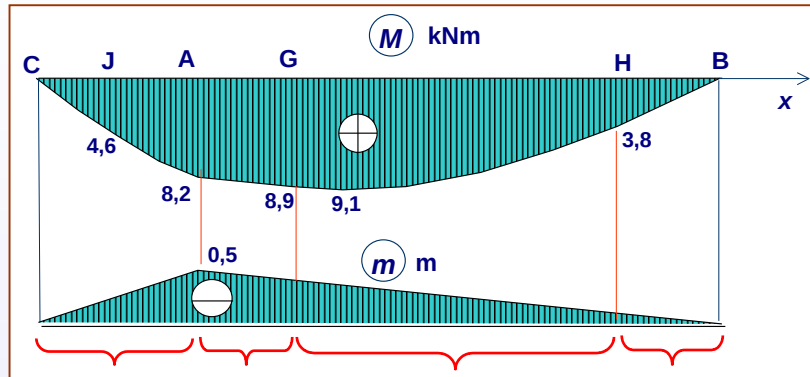
$$\frac{x - 0,5}{0,8 - 0,5} = \frac{M - 8200}{8900 - 8200} \quad \Rightarrow \quad M_{AG} = \underline{2333x + 7033}$$

Paindemomendi m funktsioon lõigus AB

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_A = 0,5 \text{ m} \quad x_2 = x_B = 2,1 \text{ m} \\ m_1 = m_A = -0,5 \text{ m} \quad m_2 = m_B = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{x - 0,5}{2,1 - 0,5} = \frac{m - (-0,5)}{0 - (-0,5)} \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = \underline{0,3125x - 0,6562}$$

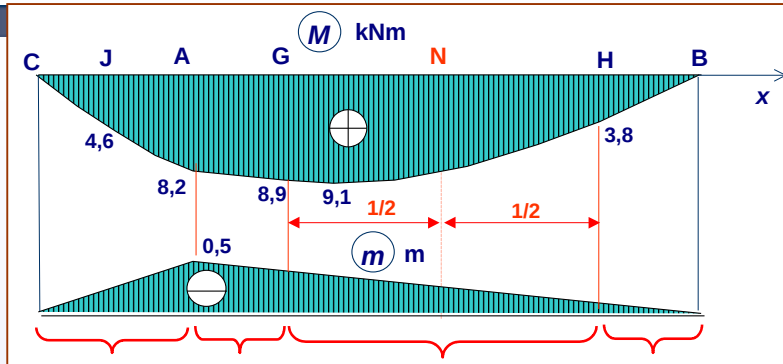
6.4.4. Mohr'i integraal pidevusvahemikule AG (2)



Analüütiline integreerimine

$$\begin{aligned}
 \int_A^G M_{AG} m_{AB} dx &= \int_{0,5}^{0,8} (2333x + 7033)(0,3125x - 0,6562) dx = \int_{0,5}^{0,8} (729x^2 + 667x - 4615) dx = \\
 &= \int_{0,5}^{0,8} 729x^2 dx + \int_{0,5}^{0,8} 667x dx - \int_{0,5}^{0,8} 4615 dx = 729 \frac{x^3}{3} \Big|_{0,5}^{0,8} + 667 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^{0,8} - 4615x \Big|_{0,5}^{0,8} = \\
 &= 729 \frac{0,8^3 - 0,5^3}{3} + 667 \frac{0,8^2 - 0,5^2}{2} - 4615(0,8 - 0,5) = -1160,3 \approx \underline{\underline{-1160 \text{ Nm}^3}}
 \end{aligned}$$

6.4.5. Mohr'i integraal pidevusvahemikule GH (1)



Simpson'i valem (numbriline integreerimine)

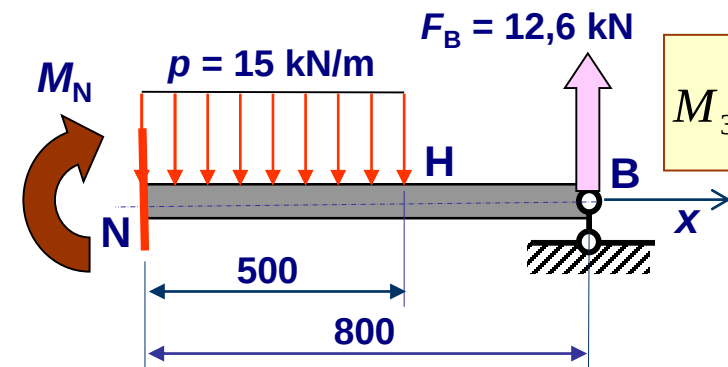
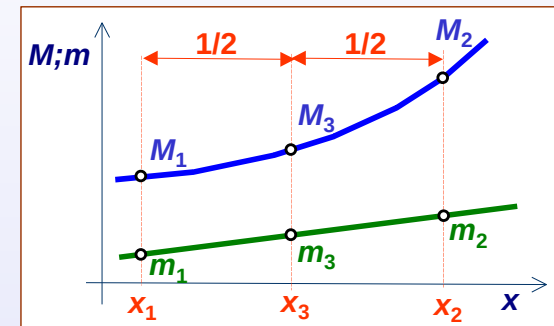
$$\int_{x_1}^{x_2} M m dx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4M_3 m_3 + M_2 m_2)$$

Parameetrid Simpson'i valemisse

$$x_1 = x_G = 0,8 \text{ m} \quad x_2 = x_H = 1,8 \text{ m} \quad x_3 = 1,3 \text{ m}$$

$$M_1 = M_G = 8,9 \text{ kNm} \quad m_1 = m_G = 0,3125 \cdot 0,8 - 0,6562 = -0,406 \text{ m}$$

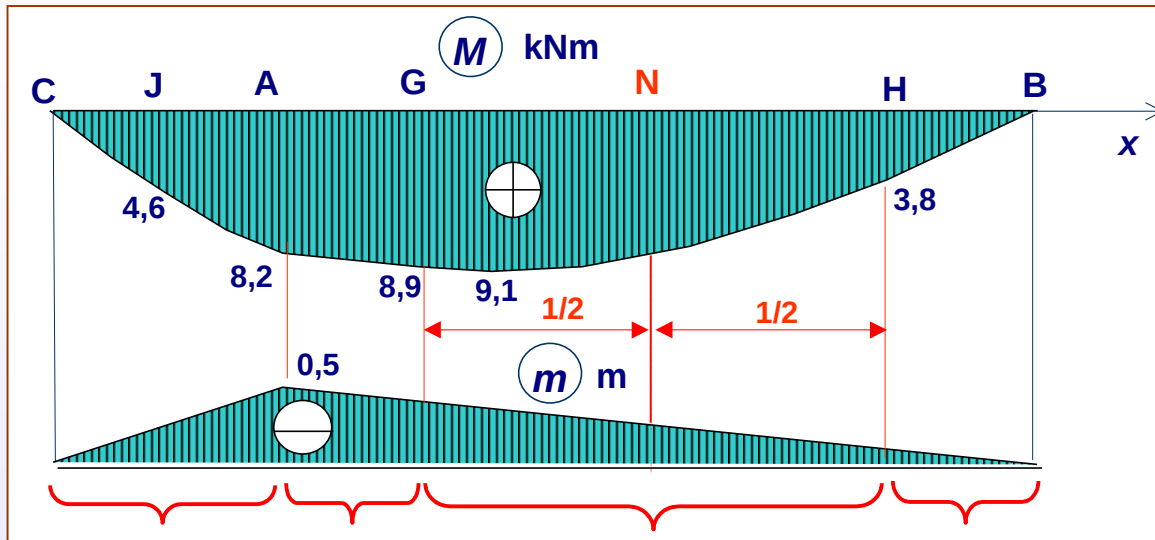
$$M_2 = M_H = 3,8 \text{ kNm} \quad m_2 = m_H = 0,3125 \cdot 1,8 - 0,6562 = -0,0937 \text{ m}$$



$$M_3 = M_N = F_B \cdot 0,8 - \frac{p \cdot 0,5^2}{2} = 12,6 \cdot 0,8 - \frac{15 \cdot 0,5^2}{2} = 8,205 \approx 8,20 \text{ kNm}$$

$$m_3 = m_N = 0,3125 \cdot 1,3 - 0,6562 = -0,2499 \approx -0,25 \text{ m}$$

6.4.5. Mohr'i integraal pidevusvahemikule GH (2)

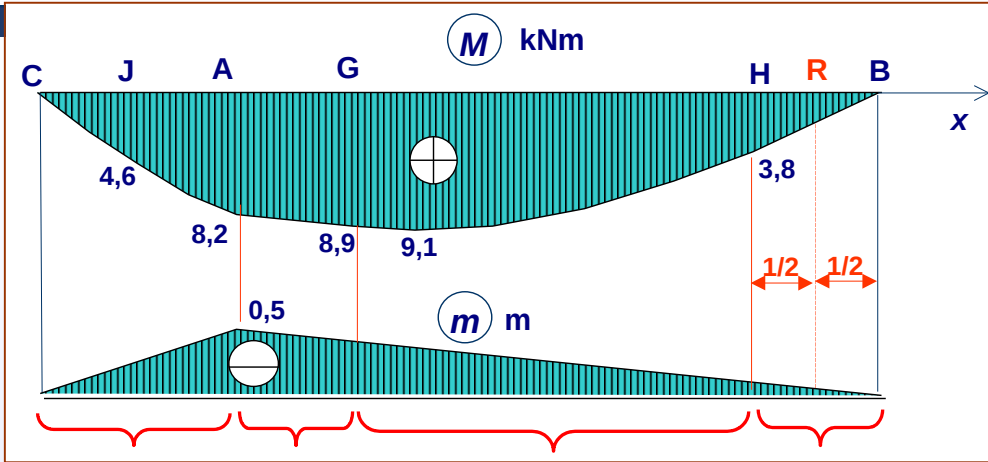


Numbriline integreerimine
Simpson'i valemiga

$$\int_G^H M_{GH} m_{AB} dx = \frac{x_H - x_G}{6} (M_G m_G + 4M_N m_N + M_H m_H) =$$

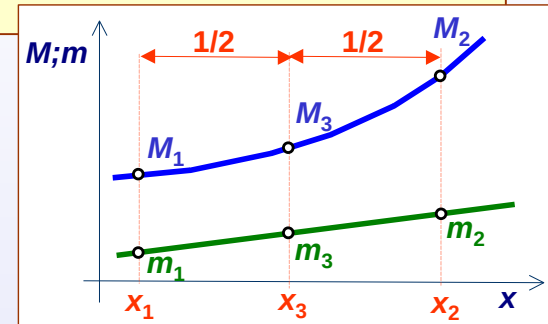
$$= \frac{1,8 - 0,8}{6} [8900 \cdot (-0,406) + 4 \cdot 8200 \cdot (-0,25) + 3800 \cdot (-0,0937)] = \underline{\underline{-2028 \text{ Nm}^3}}$$

6.4.6. Mohr'i integraal pidevusvahemikule HB



Simpson'i valem (numbriline integreerimine)

$$\int_{x_1}^{x_2} M m dx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4M_3 m_3 + M_2 m_2)$$



Parameetrid Simpson'i valemisse

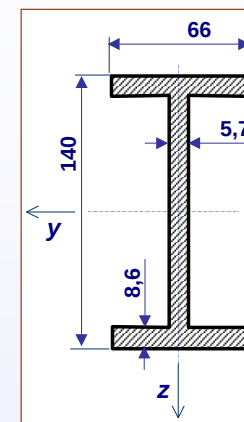
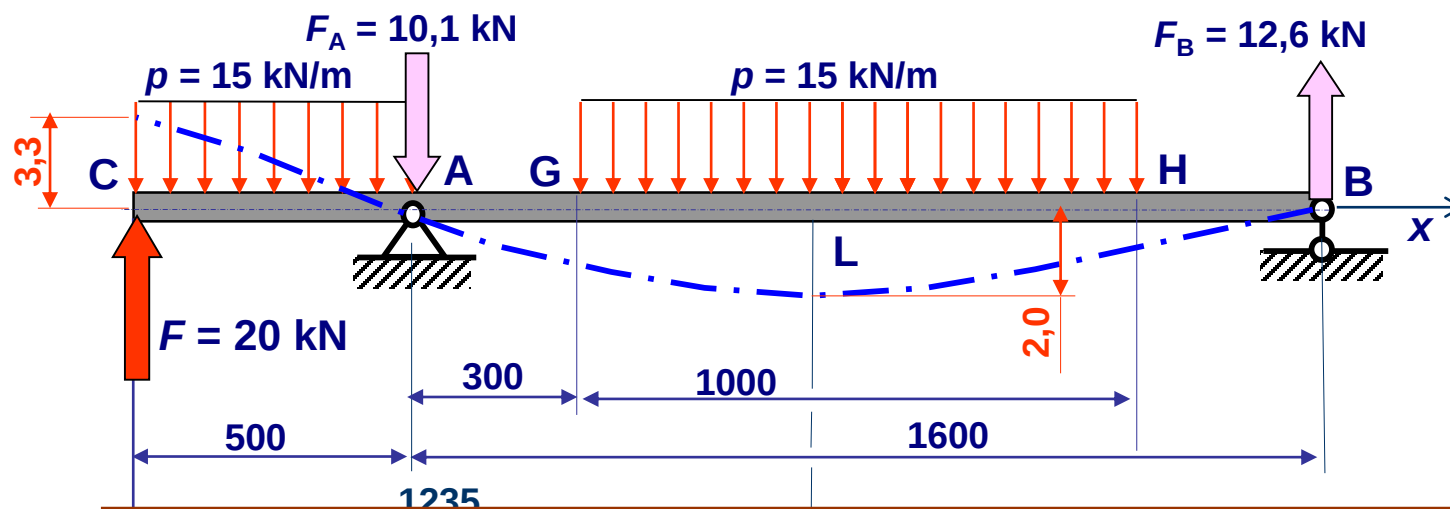
$$x_1 = x_H = 1,8 \text{ m} \quad x_2 = x_B = 2,1 \text{ m} \quad x_3 = x_R = 1,95 \text{ m}$$

$$M_1 = M_H = 3,8 \text{ kNm} \quad m_1 = m_H = -0,0937 \text{ m} \quad M_2 = M_B = 0 \quad m_2 = m_B = 0$$

$$M_3 = M_R = 1,9 \text{ kNm} \quad m_3 = m_R = 0,3125 \cdot 1,95 - 0,6562 = -0,04682 \approx -0,0468 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \int_H^B M_{HB} m_{AB} dx &= \frac{x_B - x_H}{6} (M_H m_H + 4M_R m_R + M_B m_B) = \\ &= \frac{2,1 - 1,8}{6} [3800 \cdot (-0,0937) + 4 \cdot 1900 \cdot (-0,0468) + 0 \cdot 0] = -35,58 \approx \underline{\underline{-35,6 \text{ Nm}^3}} \end{aligned}$$

6.4.7. Läbipaine ristlõikes C



$$v_C EI = \int_C^B M m dx = \int_C^A M_{CA} m_{CA} dx + \int_A^G M_{AG} m_{AG} dx + \int_G^H M_{GH} m_{GH} dx + \int_H^B M_{HB} m_{HB} dx =$$

$$= -725 - 1160 - 2028 - 35,6 = -3948,6 \approx \underline{-3950 \text{ m}}$$

Ristlõike C (konsoolse otsa) läbipaine

$$v_C = \frac{-3950}{EI} = \frac{-3950}{210 \cdot 10^9 \cdot 573 \cdot 10^{-8}} = -0,00328 \text{ m} \approx \underline{-3,3 \text{ mm}}$$

"-" näitab, et siire on z-telje negatiivses suunas, ehk üles

Ristlõike C
läbipaine on
arvutatud õigesti

6.5. Ristlõike L läbipaine

6.5.1. Ristlõike L ühikjõu paindemoment

Ristlõikes L on tarvis arvutada läbipainde väärtus



Ristlõikes L rakendatakse ühikjõud $F = 1$

Toereaktsioon F_A

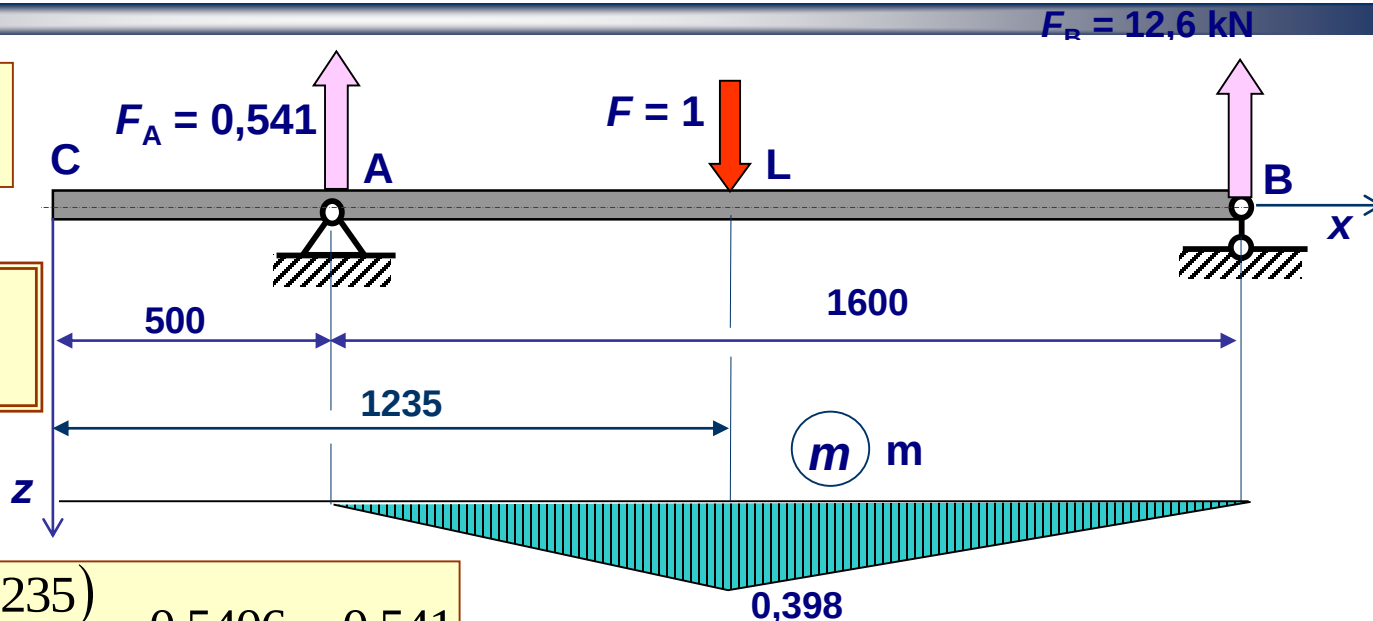
$$F_A = F \frac{LB}{AB} = 1 \cdot \frac{(0,5 + 1,6 - 1,235)}{1,6} = 0,5406 \approx 0,541$$

Paindemomendi m väärtused

$$m_A = 0$$

$$m_L = F_A \cdot AL = 0,541 \cdot (1,235 - 0,5) = 0,3976 \approx 0,398 \text{ m}$$

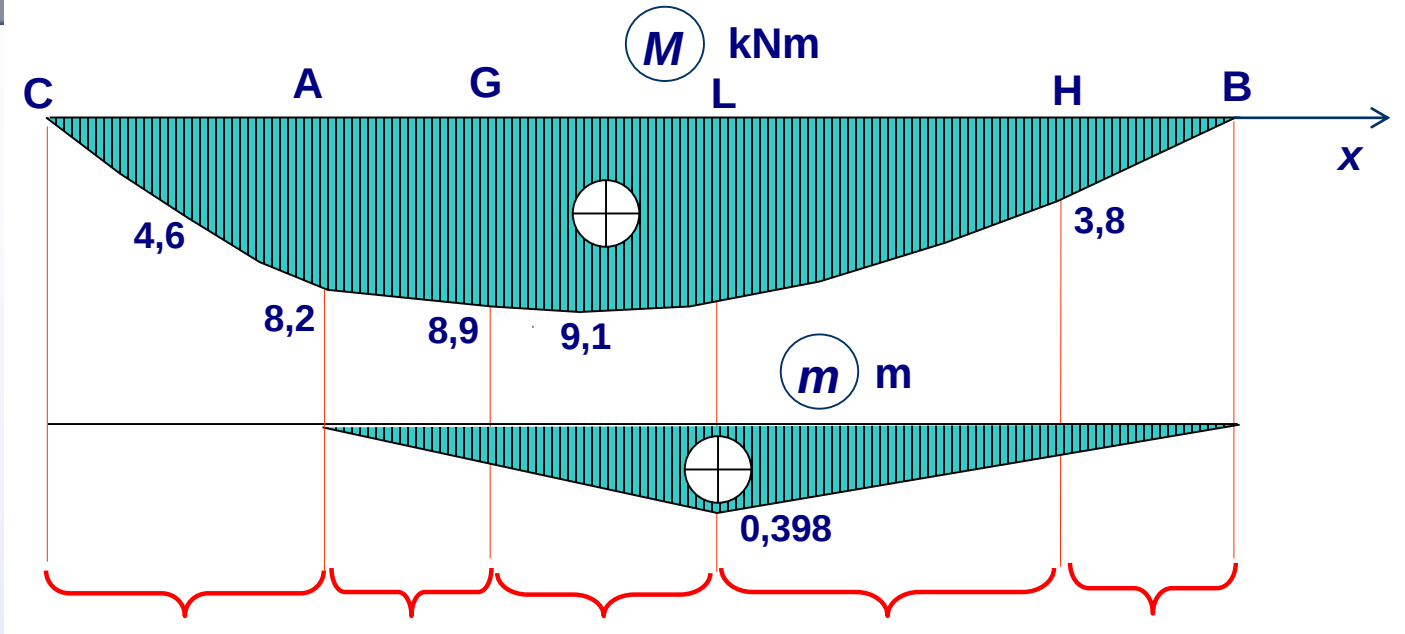
$$m_B = 0$$



Paindemomendi m pidevusvahemikud

1. Lõik AL: paindemomendi funktsioon on sirge
2. Lõik LB: paindemomendi funktsioon on sirge

6.5.2. Ristlõike C läbipainde *Mohr*'i valem



= 0, sest m = 0

Ristlõike L läbipaine

$$v_L EI = \int_C^B M m dx = \int_C^A M_{CA} m_{CA} dx + \int_A^G M_{AG} m_{AG} dx + \int_G^L M_{GL} m_{GL} dx + \int_L^H M_{LH} m_{LH} dx + \int_H^B M_{HB} m_{HB} dx$$

Pidevus-
vahemik CA

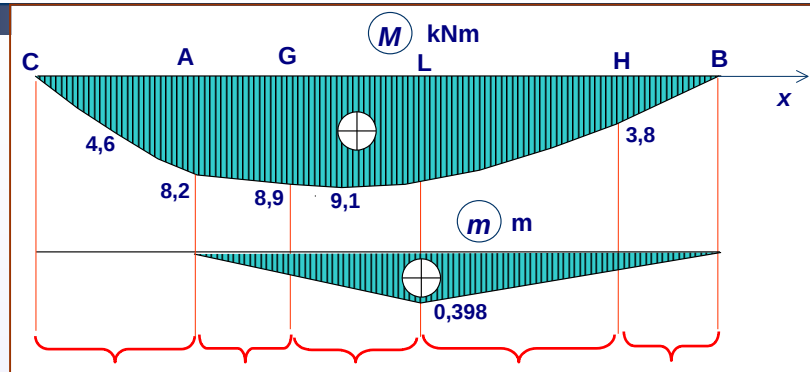
Pidevus-
vahemik AG

Pidevus-
vahemik GL

Pidevus-
vahemik LH

Pidevus-
vahemik HB

6.5.3. Mohr'i integraal pidevusvahemikule AG (1)



Paindemomendi M funktsioon lõigus AG

$$M_{AG} = \underline{2333x + 7033}$$

Paindemomendi m funktsioon lõigus AL

$$x_1 = x_A = 0,5 \text{ m} \quad x_2 = x_L = 1,235 \text{ m}$$

$$m_1 = m_A = 0 \quad m_2 = m_L = 0,398 \text{ m}$$

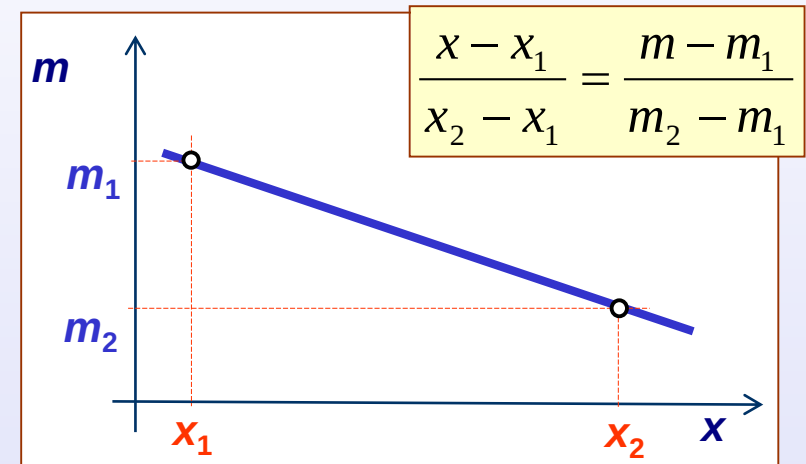
$$\frac{x - 0,5}{1,235 - 0,5} = \frac{m - 0}{0,398 - 0}$$



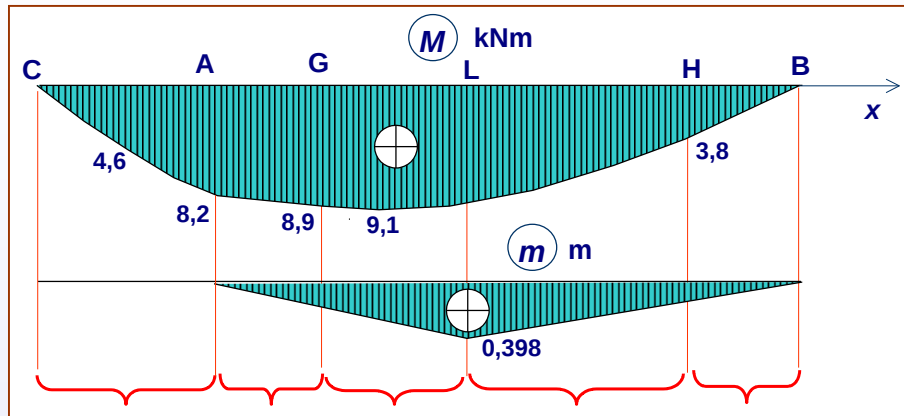
$$m_{AL} = \underline{0,5415x - 0,2707}$$

Lineaarfunktsioone saab integreerida analüütiliselt

Sirge võrrandi tuletamine



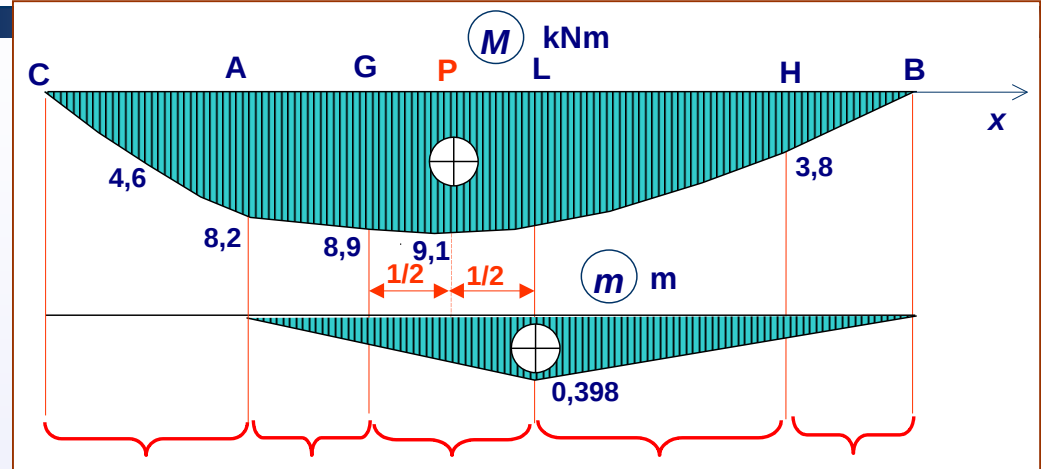
6.5.4. Mohr'i integraal pidevusvahemikule AG (2)



Analüütiline integreerimine

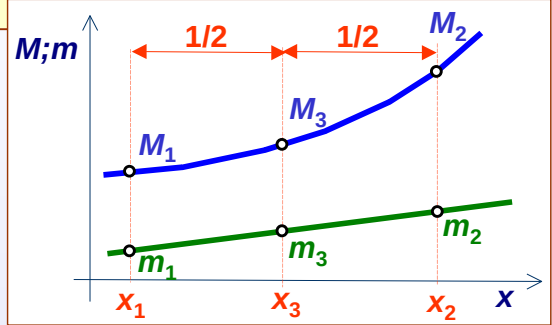
$$\begin{aligned}
 \int_A^G M_{AG} m_{AB} dx &= \int_{0,5}^{0,8} (2333x + 7033)(0,5415x - 0,2707) dx = \int_{0,5}^{0,8} (1263x^2 + 3177x - 1904) dx = \\
 &= \int_{0,5}^{0,8} 1263x^2 dx + \int_{0,5}^{0,8} 3177x dx - \int_{0,5}^{0,8} 1904 dx = 1263 \frac{x^3}{3} \Big|_{0,5}^{0,8} + 3177 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^{0,8} - 1904x \Big|_{0,5}^{0,8} = \\
 &= 1263 \frac{0,8^3 - 0,5^3}{3} + 3177 \frac{0,8^2 - 0,5^2}{2} - 1904(0,8 - 0,5) = 211,2 \approx \underline{\underline{211 \text{ Nm}^3}}
 \end{aligned}$$

6.5.5. Mohr'i integraal pidevusvahemikule GL (1)



Simpson'i valem (numbriline integreerimine)

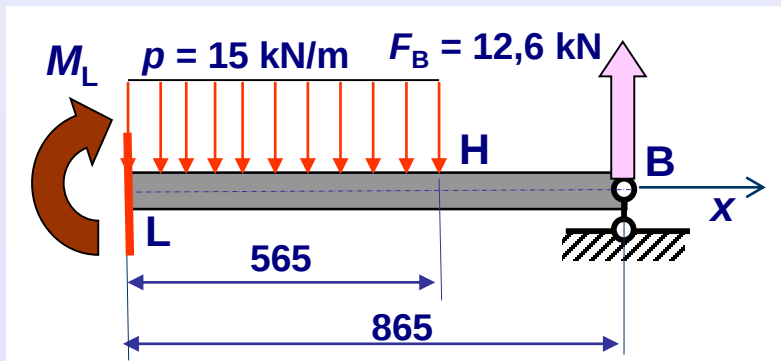
$$\int_{x_1}^{x_2} M m dx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4 M_3 m_3 + M_2 m_2)$$



Parameetrid Simpson'i valemisse

$$x_1 = x_G = 0,8 \text{ m} \quad x_2 = x_L = 1,235 \text{ m} \quad x_3 = x_P = 1,02 \text{ m}$$

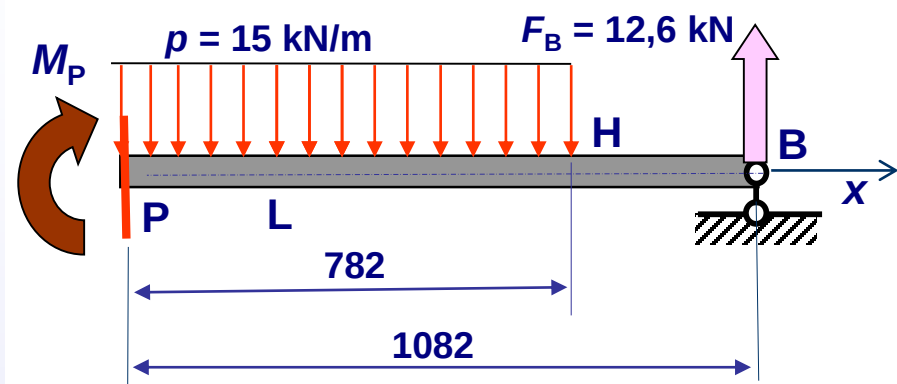
$$M_1 = M_G = 8,9 \text{ kNm} \quad m_1 = m_G = 0,5415 \cdot 0,8 - 0,2707 = 0,1625 \text{ m}$$



$$M_2 = M_L = F_B L_B - \frac{p L_H^2}{2} = 12,6 \cdot 0,865 - \frac{15 \cdot 0,565^2}{2} = 8,504 \approx 8,50 \text{ kNm}$$

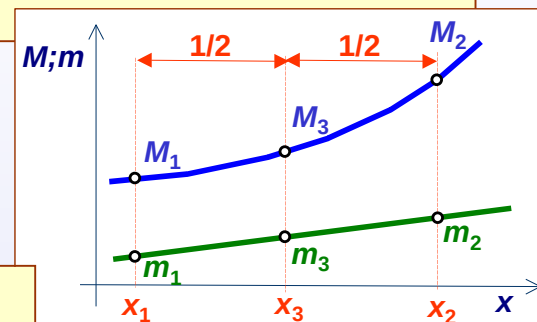
$$m_2 = m_L = 0,398 \text{ m}$$

6.5.5. Mohr'i integraal pidevusvahemikule GL (2)



Simpson'i valem (numbriline integreerimine)

$$\int_{x_1}^{x_2} M m dx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4M_3 m_3 + M_2 m_2)$$



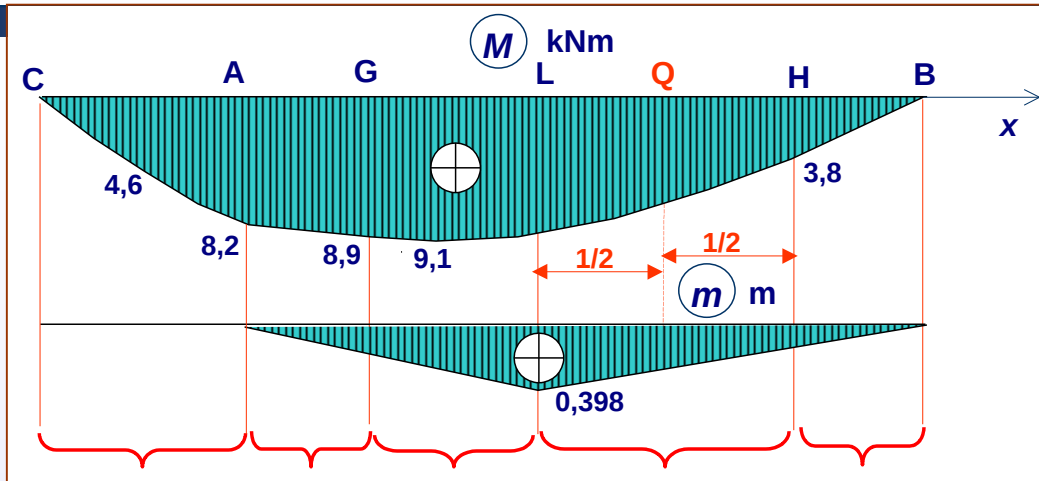
$$M_3 = M_P = F_B PB - \frac{pPH^2}{2} = 12,6 \cdot 1,082 - \frac{15 \cdot 0,782^2}{2} = 9,046 \approx 9,05 \text{ kNm}$$

$$m_3 = m_p = 0,5415 \cdot 1,02 - 0,2707 = 0,2816 \text{ m}$$

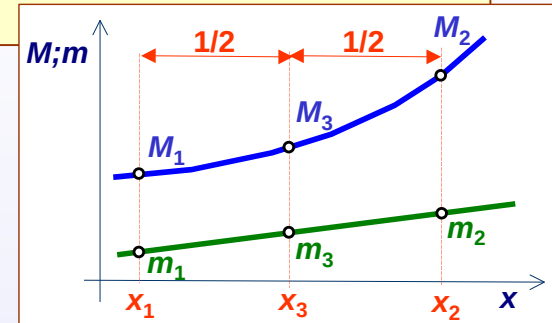
Numbriline integreerimine Simpson'i valemiga

$$\begin{aligned} \int_G^L M_{GL} m_{AL} dx &= \frac{x_L - x_G}{6} (M_G m_G + 4M_P m_P + M_L m_L) = \\ &= \frac{1,235 - 0,8}{6} [8900 \cdot 0,1625 + 4 \cdot 9050 \cdot 0,2816 + 8500 \cdot 0,398] = \underline{1089 \text{ Nm}^3} \end{aligned}$$

6.5.6. *Mohr*'i integraal pidevusvahemikule LH (1)



$$\int_{x_1}^{x_2} Mmdx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4M_3 m_3 + M_2 m_2)$$



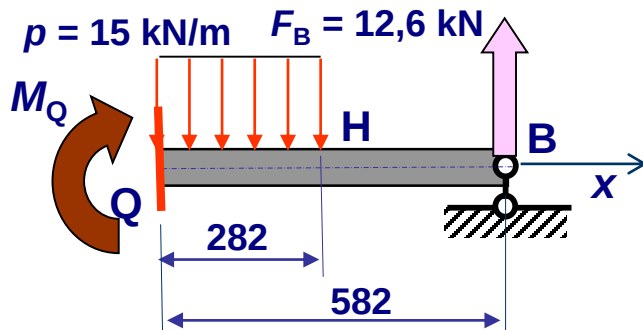
Parameetrid *Simpson*'i valemisse

$$x_1 = x_L = 1,235 \text{ m} \quad x_2 = x_H = 1,8 \text{ m} \quad x_3 = x_Q \cong 1,517 \text{ m}$$

$$M_1 = M_L = 8,5 \text{ kNm} \quad m_1 = m_L = 0,398 \text{ m}$$

$$M_2 = M_H = 3,8 \text{ kNm}$$

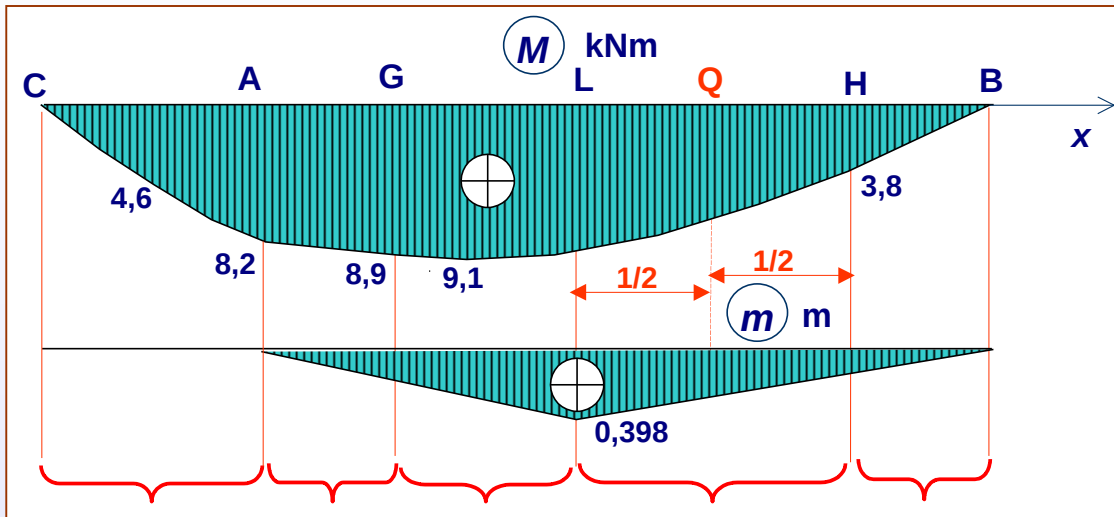
$$m_2 = m_H = 0,398 \frac{\text{HB}}{\text{LB}} = 0,398 \frac{300}{865} = 0,138 \text{ m}$$



$$M_3 = M_Q = F_B \cdot QB - \frac{p \cdot QH^2}{2} = 12,6 \cdot 0,582 - \frac{15 \cdot 0,282^2}{2} = 6,736 \approx 6,74 \text{ kNm}$$

$$m_3 = m_Q = 0,398 \frac{\text{QB}}{\text{LB}} = 0,398 \frac{582}{865} = 0,2678 \text{ m}$$

6.5.6. Mohr'i integraal pidevusvahemikule LH (2)

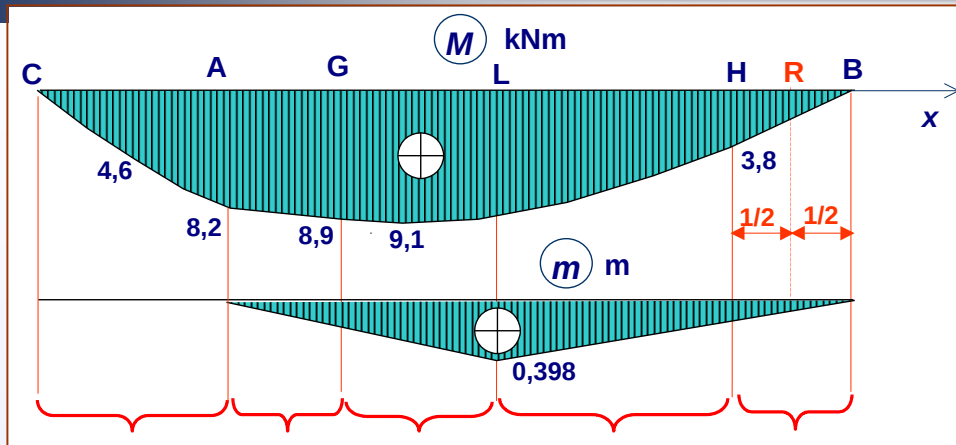


Numbriline integreerimine
Simpson'i valemiga

$$\int_L^H M_{LH} m_{LB} dx = \frac{x_H - x_L}{6} (M_L m_L + 4M_Q m_Q + M_H m_H) =$$

$$= \frac{1,8 - 1,235}{6} [8500 \cdot 0,398 + 4 \cdot 6740 \cdot 0,2678 + 3800 \cdot 0,138] = \underline{1048 \text{ Nm}^3}$$

6.5.7. Mohr'i integraal pidevusvahemikule HB



Parameetrid Simpson'i valemisse

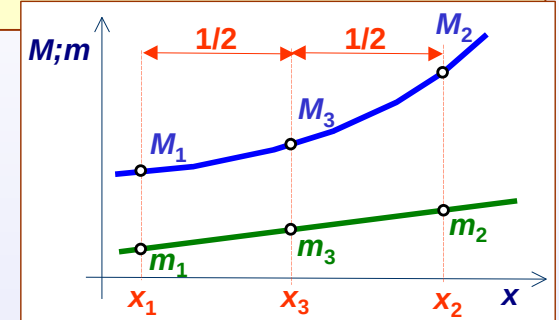
$$x_1 = x_H = 1,8 \text{ m} \quad x_2 = x_B = 2,1 \text{ m} \quad x_3 = 1,95 \text{ m}$$

$$M_1 = M_H = 3,8 \text{ kNm} \quad m_1 = m_H = 0,138 \text{ m} \quad M_2 = M_B = 0 \quad m_2 = m_B = 0$$

$$M_3 = M_R = 1,9 \text{ kNm} \quad m_3 = m_R = 0,069 \text{ m}$$

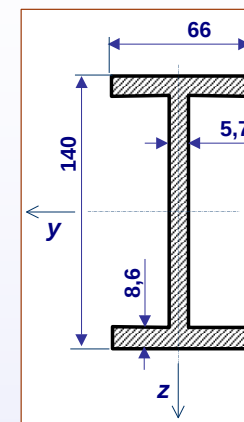
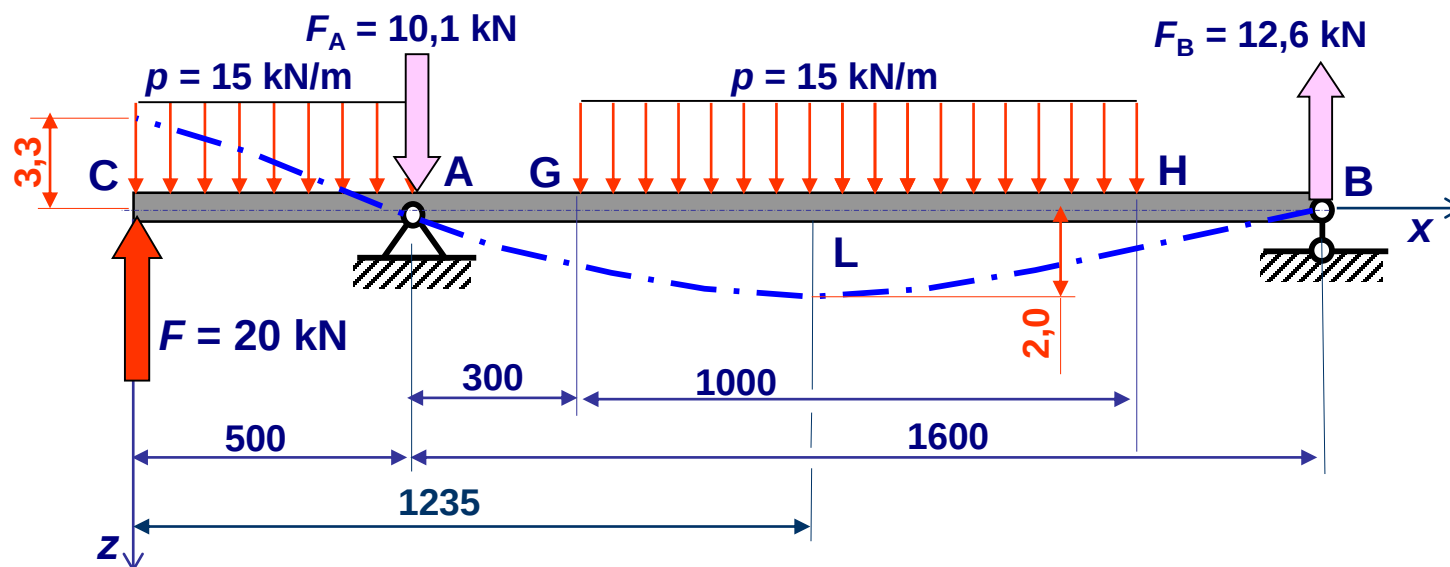
Simpson'i valem (numbriline integreerimine)

$$\int_{x_1}^{x_2} M m dx = \frac{x_2 - x_1}{6} (M_1 m_1 + 4M_3 m_3 + M_2 m_2)$$



$$\begin{aligned} \int_H^B M_{HB} m_{LB} dx &= \frac{x_B - x_H}{6} (M_H m_H + 4M_R m_R + M_B m_B) = \\ &= \frac{2,1 - 1,8}{6} [3800 \cdot 0,138 + 4 \cdot 1900 \cdot 0,069 + 0 \cdot 0] = 52,44 \approx \underline{\underline{52,4 \text{ Nm}^3}} \end{aligned}$$

6.5.8. Läbipaine ristlõikes L



$$v_L EI = \int_C^B M m dx = \int_C^A M_{CA} m_{CA} dx + \int_A^G M_{AG} m_{AG} dx + \int_G^L M_{GL} m_{GL} dx + \int_L^H M_{LH} m_{LH} dx + \int_H^B M_{HB} m_{HB} dx =$$

$$= 0 + 211 + 1089 + 1048 + 52,4 = 2400,4 \approx 2400 \text{ Nm}^3$$

Ristlõike L läbipaine

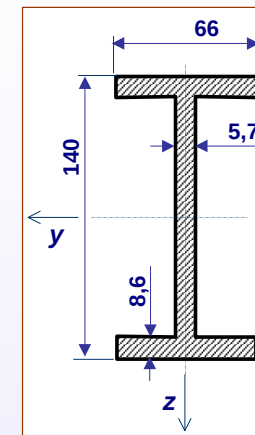
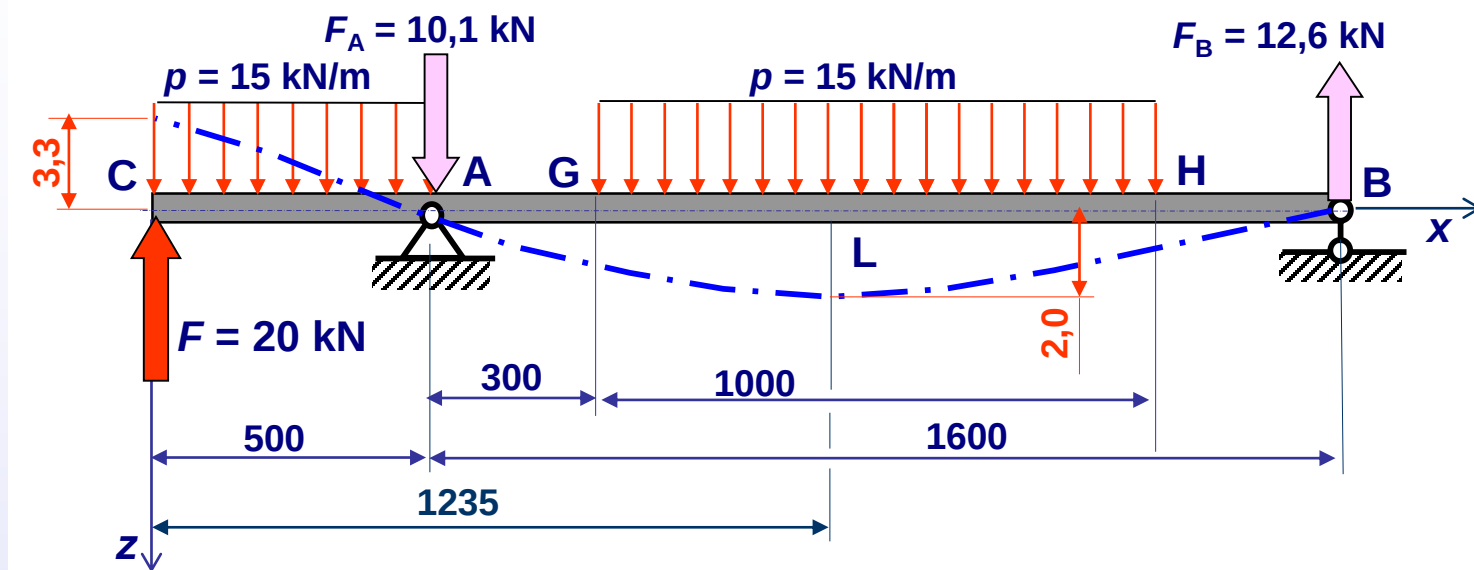
$$v_L = \frac{2400}{EI} = \frac{2400}{210 \cdot 10^9 \cdot 573 \cdot 10^{-8}} = 0,00199 \text{ m} \approx \underline{2,0 \text{ mm}}$$

”+” näitab, et siire on z-telje positiivses suunas, ehk alla

Ristlõike L
läbipaine on
arvutatud õigesti

7. Tulemus

INP140 profiiliga ühtlane tala



Läbipaine konsoolises otsas

$$v_C = -3,3 \text{ mm} \text{ (üles)}$$

Suurim läbipaine tugede vahel

$$v_L = 2,0 \text{ mm} \text{ (alla)}$$

Pöördenurk konsoolises otsas

$$\varphi_C = 0,0071 \text{ rad} \approx 0,41^\circ$$

Vähim normaalpinge tugevusvarutegur

$$S_\sigma = 3,1$$